Analiza matematyczna 1
Zajęcia nr 5

Gradient i równanie płaszczyzny stycznej

```
? Grad
```

Grad[f, {x_1, …, x_n}] gives the gradient ($\partial f/\partial x_1$, …, $\partial f/\partial x_n$).
Grad[f, {x_1, …, x_n}, *chart*] gives the gradient in the coordinates *chart*. »

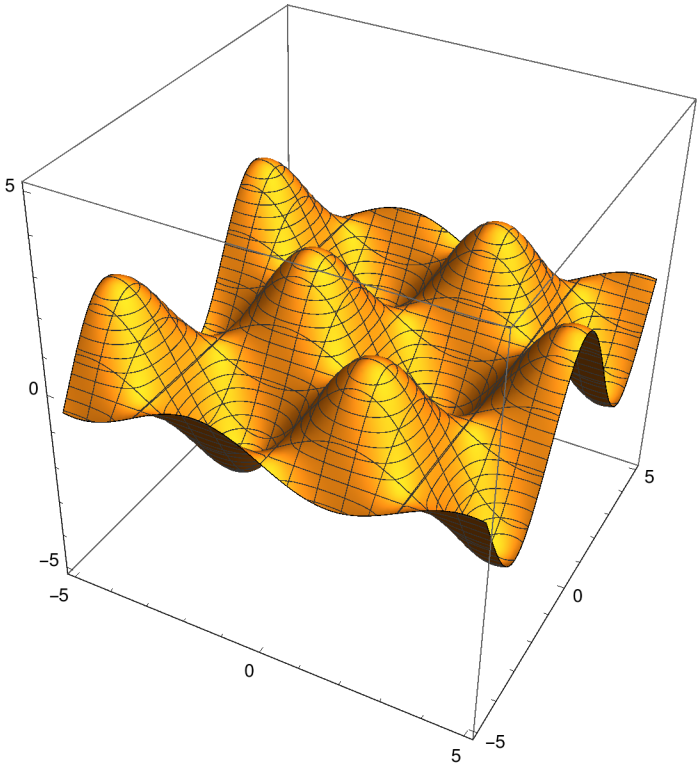
grad F= {$\frac{\partial}{\partial x}$F , $\frac{\partial}{\partial y}$F, $\frac{\partial}{\partial z}$F}

```
F[x_, y_, z_] = z + 2 * Sin[x] Cos[y]
```

```
z + 2 Cos[y] Sin[x]
```

Równanie powierzchni F(x,y,z)==0

```
ContourPlot3D[F[x, y, z] == 0, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]
```



płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie (x0,y0,z0) jest prostopadla do wektora gradientu gradF (x0,y0,z0)

```
G[x_, y_, z_] = Grad[F[x, y, z], {x, y, z}]
```

```
{2 Cos[x] Cos[y], -2 Sin[x] Sin[y], 1}
```

```
G[x, y, z][[1]]
G[x, y, z][[2]]
G[x, y, z][[3]]
```

```
2 Cos[x] Cos[y]
```

```
-2 Sin[x] Sin[y]
```

```
1
```

Równanie płaszczyzny stycznej:

$$(x - x_0)\,\frac{\partial}{\partial x}F(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\,\frac{\partial}{\partial y}F(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\,\frac{\partial}{\partial z}F(x_0, y_0, z_0) == 0$$

```
PlaszczyznaStyczna[x_, y_, z_, x0_, y0_, z0_] =
 G[x0, y0, z0][[1]] (x - x0) + G[x0, y0, z0][[2]] (y - y0) + G[x0, y0, z0][[3]] (z - z0)
```

```
z - z0 + 2 (x - x0) Cos[x0] Cos[y0] - 2 (y - y0) Sin[x0] Sin[y0]
```

Policzmy styczną w punkcie o ustonym x0 i y0
Wartość z_0 musi być dobrane tak aby {x0,y0,z0} leżał na powierzchni wykresu F(x0,y0,z0)==0

```
Solve[F[x0, y0, z] == 0, z]
```

```
{{z → -2 Cos[y0] Sin[x0]}}
```

```
Z0[x0_, y0_] = z /. Solve[F[x0, y0, z] == 0, z][[1]]
```

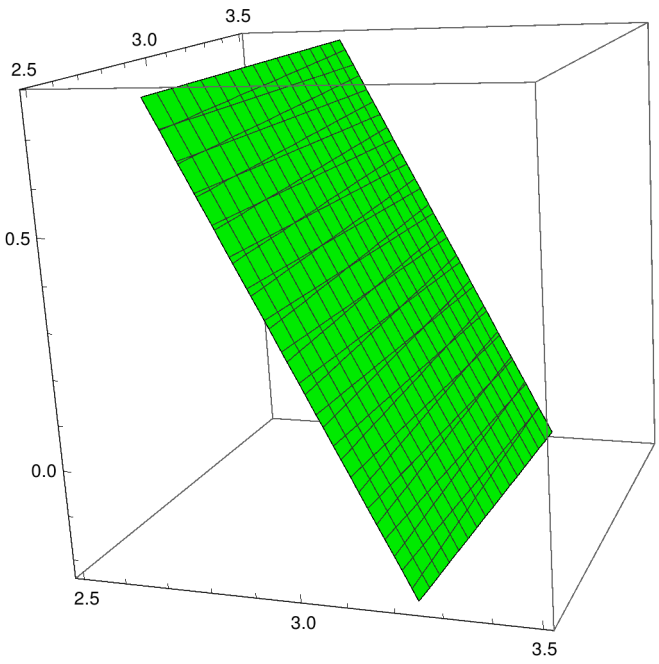
```
-2 Cos[y0] Sin[x0]
```

```
PlaszczyznaStyczna[x_, y_, z_, x0_, y0_] = G[x0, y0, Z0[x0, y0]][[1]] (x - x0) +
  G[x0, y0, Z0[x0, y0]][[2]] (y - y0) + G[x0, y0, Z0[x0, y0]][[3]] (z - Z0[x0, y0])
```

```
z + 2 (x - x0) Cos[x0] Cos[y0] + 2 Cos[y0] Sin[x0] - 2 (y - y0) Sin[x0] Sin[y0]
```

Policzmy styczną w punkcie x0=3 i y0=3

```
ContourPlot3D[
 PlaszczyznaStyczna[x, y, z, 3, 3] == 0, {x, 2.5, 3.5},
 {y, 2.5, 3.5}, {z, Z0[3, 3] - 0.5, Z0[3, 3] + 0.5},
 ContourStyle → Green
]
```

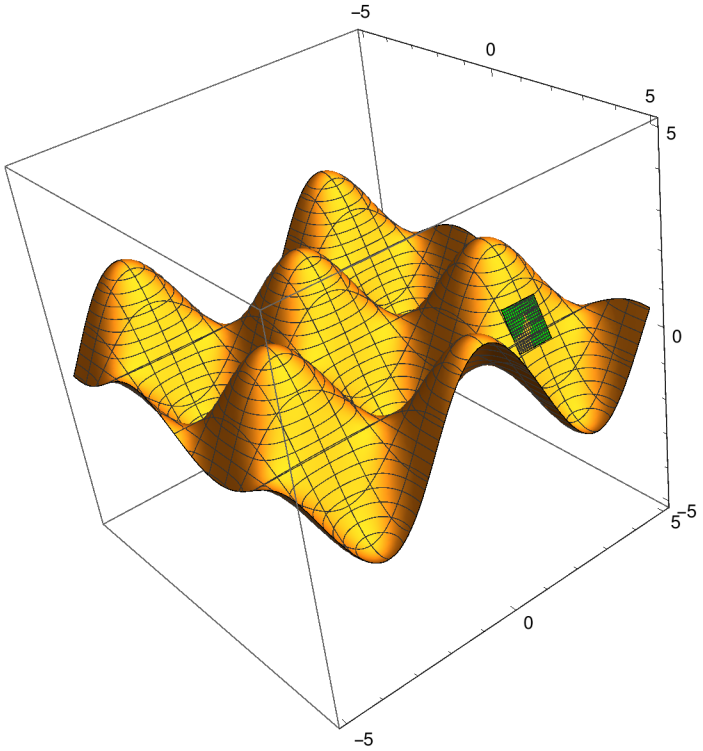


```
Show[

 ContourPlot3D[F[x, y, z] == 0, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}],

 ContourPlot3D[
  PlaszczyznaStyczna[x, y, z, 3, 3] == 0,
  {x, 2.5, 3.5}, {y, 2.5, 3.5}, {z, Z0[3, 3] - 0.5, Z0[3, 3] + 0.5},
  ContourStyle → Green
 ]

]
```



Zadanie

Dla powyzszego przykladu stwórz DynamicModule zawierający:

- ContourPlot3D równania F==0 dla x∈ {-5,5}, y∈ {-5,5} ,z∈ {-5,5}

i równania płaszczyzny stycznej x∈ { x_0-0.5, x_0+0.5}, y∈ { y_0 -0.5, y_0 +0.5},z∈ { z_0 -0.5, z_0 +0.5}

- 2 suwaki zmieniające wartości x_0 i y_0
- wartość (grad F)(x_0,y_0)

Wektory styczne do płaszczyzny

Wybierzmy dwa wektory prostopadłe do wektora gradientu i do siebie nawzajem.

```
V[x_, y_, z_] = {0, 1, 2 Sin[x] Sin[y]}
```

```
{0, 1, 2 Sin[x] Sin[y]}
```

```
W[x_, y_, z_] = {1 + 4 Sin[x]^2 Sin[y]^2, Sin[2 x] Sin[2 y], -2 Cos[x] Cos[y]}
```

$\{1 + 4\,\mathrm{Sin}[x]^2\,\mathrm{Sin}[y]^2,\ \mathrm{Sin}[2\,x]\,\mathrm{Sin}[2\,y],\ -2\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Cos}[y]\}$

```
Simplify[V[x, y, z].W[x, y, z]]
```

```
0
```

```
V[x, y, z].G[x, y, z]
```

```
0
```

```
Simplify[G[x, y, z].W[x, y, z]]
```

```
0
```

Zadanie

1. Używajac powyzszych wektorow stycznych W i V znajdz funkcje
PlaszczyznaNormalna1[x,y,z,x0,y0] i PlaszczyznaNormalna2[x,y,z,x0,y0] takie ze:

PlaszczyznaNormalna1[x,y,z,x0,y0]==0
PlaszczyznaNormalna2[x,y,z,x0,y0]==0

to równania płaszczyzn prostopadłych do wektorów stycznych w punkcie {x0,y0,z0}.

2. Do rozwiazania poprzedniego zadania dodaj :
ContourPlot3D dwóch płaszczyzn prostopadłych do wektorów stycznych do wykresu powierzchni F
(x∈ { x_0-0.5, x_0+0.5}, y∈ { y_0 -0.5, y_0 +0.5}, z∈ { z_0 -0.5, z_0 +0.5})

Rozwijanie w szereg

```
? Series
```

Series[f, {x, x_0, n}] generates a power series expansion for f about the point $x = x_0$ to order $(x - x_0)^n$.
Series[f, {x, x_0, n_x}, {y, y_0, n_y}, ...] successively finds series expansions with respect to x, then y, etc. >>

```
Series[f[x], {x, a, 3}]
```

$$f[a] + f'[a]\,(x-a) + \frac{1}{2} f''[a]\,(x-a)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}[a]\,(x-a)^3 + O[x-a]^4$$

```
Series[Sin[x]^2, {x, 0, 20}]
```

$$x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \frac{x^8}{315} + \frac{2x^{10}}{14\,175} - \frac{2x^{12}}{467\,775} + \frac{4x^{14}}{42\,567\,525} - \frac{x^{16}}{638\,512\,875} + \frac{2x^{18}}{97\,692\,469\,875} - \frac{2x^{20}}{9\,280\,784\,638\,125} + O[x]^{21}$$

```
Normal[%]
```

$$x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \frac{x^8}{315} + \frac{2x^{10}}{14\,175} - \frac{2x^{12}}{467\,775} + \frac{4x^{14}}{42\,567\,525} - \frac{x^{16}}{638\,512\,875} + \frac{2x^{18}}{97\,692\,469\,875} - \frac{2x^{20}}{9\,280\,784\,638\,125}$$

```
CoefficientList[%, x]
```

$$\left\{0, 0, 1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{45}, 0, -\frac{1}{315}, 0, \frac{2}{14\,175}, 0, -\frac{2}{467\,775}, 0, \frac{4}{42\,567\,525}, 0, -\frac{1}{638\,512\,875}, 0, \frac{2}{97\,692\,469\,875}, 0, -\frac{2}{9\,280\,784\,638\,125}\right\}$$

Zadanie

a) Napisz wielomian Taylora stopnia 5 w punkcie $x_0 = 1$ dla $f(x) = x^{1/3}$

b) Napisz wielomian Maclaurina stopnia 8 dla funkcji $f(x) = \ln(1 + x)$.