Analiza matematyczna 1
Zajęcia nr 6

Rozwijanie w szereg

```
? Series
```

Series[f, {x, x_0, n}] generates a power series expansion for f about the point $x = x_0$ to order $(x - x_0)^n$.
Series[f, {x, x_0, n_x}, {y, y_0, n_y}, ...] successively finds series expansions with respect to x, then y, etc. >>

```
Series[f[x], {x, a, 3}]
```

$$f[a] + f'[a]\,(x-a) + \frac{1}{2} f''[a]\,(x-a)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}[a]\,(x-a)^3 + O[x-a]^4$$

```
Series[Sin[x]^2, {x, 0, 20}]
```

$$x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2\,x^6}{45} - \frac{x^8}{315} + \frac{2\,x^{10}}{14\,175} - \frac{2\,x^{12}}{467\,775} + \frac{4\,x^{14}}{42\,567\,525} - \frac{x^{16}}{638\,512\,875} + \frac{2\,x^{18}}{97\,692\,469\,875} - \frac{2\,x^{20}}{9\,280\,784\,638\,125} + O[x]^{21}$$

```
Normal[%]
```

$$x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2\,x^6}{45} - \frac{x^8}{315} + \frac{2\,x^{10}}{14\,175} - \frac{2\,x^{12}}{467\,775} + \frac{4\,x^{14}}{42\,567\,525} - \frac{x^{16}}{638\,512\,875} + \frac{2\,x^{18}}{97\,692\,469\,875} - \frac{2\,x^{20}}{9\,280\,784\,638\,125}$$

```
CoefficientList[%, x]
```

$$\left\{0, 0, 1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{45}, 0, -\frac{1}{315}, 0, \frac{2}{14\,175}, 0, -\frac{2}{467\,775}, 0, \frac{4}{42\,567\,525}, 0, -\frac{1}{638\,512\,875}, 0, \frac{2}{97\,692\,469\,875}, 0, -\frac{2}{9\,280\,784\,638\,125}\right\}$$

Zadanie

a) Napisz wielomian Taylora stopnia 5 w punkcie $x_0 = 1$ dla $f(x) = x^{1/3}$

b) Napisz wielomian Maclaurina stopnia 8 dla funkcji $f(x) = \ln(1 + x)$.

Całki

Całki nieoznaczone

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$F'(x) = f(x)$

```
? Integrate
```

Integrate[f, x] gives the indefinite integral $\int f\,dx$.

Integrate[f, {x, x_{min}, x_{max}}] gives the definite integral $\int_{x_{min}}^{x_{max}} f\,dx$.

Integrate[f, {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}, ...] gives the multiple integral $\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy \ldots f$.

Integrate[f, {x, y, ...} ∈ reg] integrates over the geometric region reg. »

```
Integrate[1 / (x^3 + 1), x]
```

$$\frac{\text{ArcTan}\left[\frac{-1+2x}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\text{Log}[1+x] - \frac{1}{6}\text{Log}\left[1-x+x^2\right]$$

```
D[%, x]
```

$$\frac{1}{3(1+x)} - \frac{-1+2x}{6(1-x+x^2)} + \frac{2}{3\left(1+\frac{1}{3}(-1+2x)^2\right)}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{1}{1+x^3}$$

Zadanie

Oblicz całki nieoznaczone funkcji

a) 1

b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}$

d) $\frac{1}{\cosh(x)^2}$

e) $\frac{1}{x}$

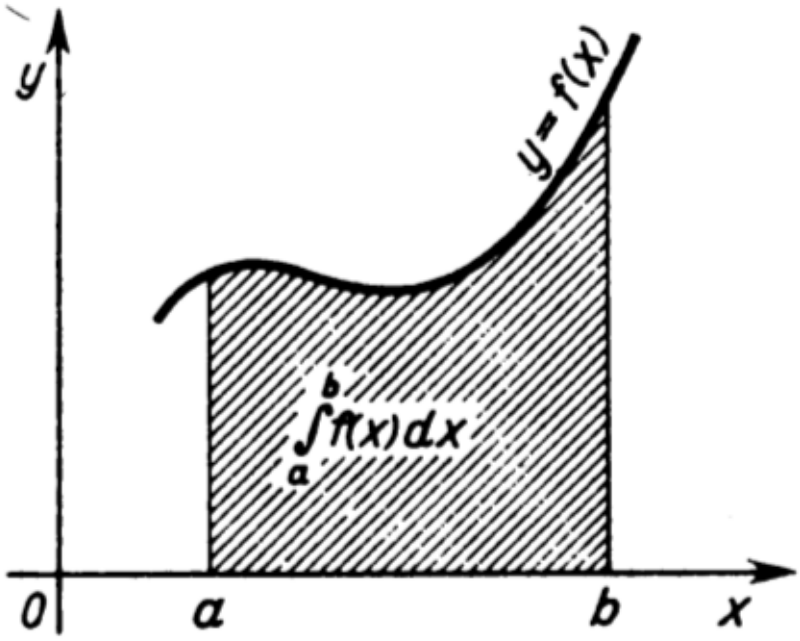
d) $x^3 \log(x)^2$

e) $e^{2x} x^4$

A nastepnie oblicz pochodne otrzymanch funkcji

Całki oznaczone

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$




```
F[x_] = Integrate[x Exp[-x], x]
```

$e^{-x}(-1-x)$

```
F[1]
```

$-\frac{2}{e}$

```
F[0]
```

-1

```
F[1] - F[0]
```

$1 - \frac{2}{e}$

```
Integrate[x Exp[-x], {x, 0, 1}]
```

$\frac{-2 + e}{e}$

Całkowanie numeryczne:

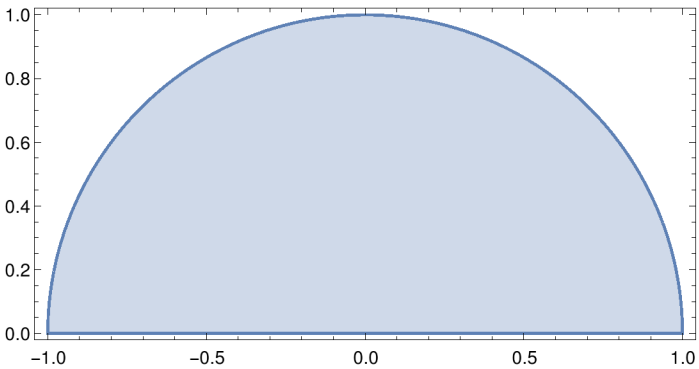
```
Integrate[Sin[Sin[x]], {x, 0, 2}]
```

$\int_0^2 \text{Sin}[\text{Sin}[x]]\, dx$

```
NIntegrate[Sin[Sin[x]], {x, 0, 2}]
```

1.24706

Przykład:
Obliczmy pole półkola - pole pomiedzy wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ a osią Ox




```
Integrate[Sqrt[R^2 - x^2 ] , {x, -R, R}, Assumptions → R > 0]
```

$\frac{\pi R^2}{2}$

Zadanie

Oblicz całki oznaczone funkcji

a) 1 od 0 do 10

b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ od 0 do 1

c) $\frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}$ od 1 do 2

d) $\frac{1}{\cosh(x)^2}$ od 0 do ∞

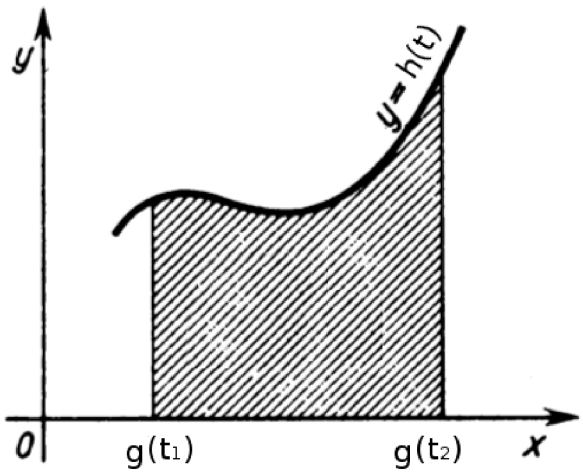
e) $\frac{1}{x}$ od 1 do 2

d) $x^3 \log(x)^2$ od 1 do e

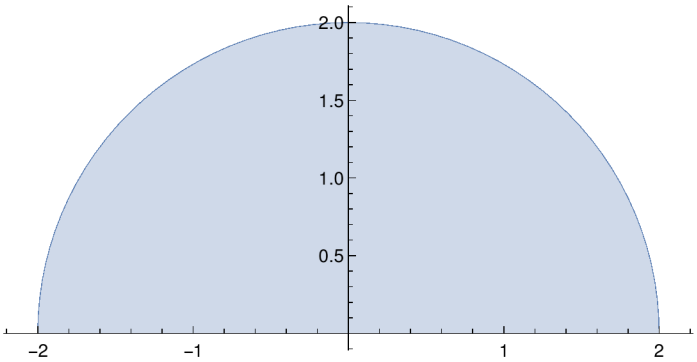
e) $e^{2x} x^4$ od 0 do 1

Całki parametryzowane

Krzywa okreslona rownaniami w postaci parametryzowanej
x=g(t) i y=h(t)
Pole obszaru pomiędzy krzywą a osią Ox
$\int_{t_1}^{t_2} h(t) \left| g'(t) \right| dt$



Obliczmy pole półkola - pole pomiedzy wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ a osią Ox



Wprowadzamy parametryzację
x=R Cos[t]
y=R Sin[t]

```
x[t_] = R Cos[t]
y[t_] = R Sin[t]
```

```
R Cos[t]
```

```
R Sin[t]
```

```
D[x[t], t]
```

```
-R Sin[t]
```

```
Integrate[ y[t] Abs[D[x[t], t]] , {t, 0, Pi}, Assumptions → R > 0]
```

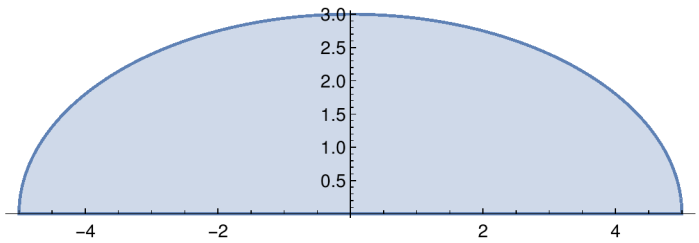
$$\frac{\pi R^2}{2}$$

Zadanie

Oblicz pole połowy elipsy o półosiach a i b - pole pomiedzy osią Ox a wykresem funkcji y=
$f(x) = b\sqrt{1 - x^2 / a^2}$

a) najpierw całkując po zmiennej x funkcję f(x)

b) przekształcić wyrażenie podcalkowe wprowadzając parametryzację:
$x(t) = a \cos(t)$
$y(t) = b \sin(t)$
i wycałkować po t



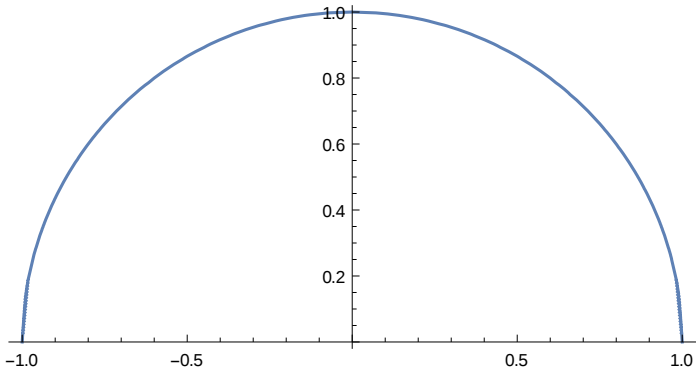
Całka długościłuku

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Jesli wprowadzimy parametryzacje x=x(t) i y=y(t)

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt$$

Obliczmy długość łuku półokręgu




```
f[x_] = Sqrt[R^2 - x^2]
```

$$\sqrt{R^2 - x^2}$$

```
Df = D[f[x], x]
```

$$-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

```
Integrate[Sqrt[1 + Df^2], {x, -R, R}, Assumptions → R > 0]
```

$$\pi R$$

Wprowadzamy parametryzację
x=R cos(t)
y=R sin(t)

```
x[t_] = R Cos[t]
y[t_] = R Sin[t]
```

R Cos[t]

R Sin[t]

```
Dx = D[x[t], t]
```

-R Sin[t]

```
Dy = D[y[t], t]
```

R Cos[t]

```
Sqrt[Dx^2 + Dy^2]
```

$\sqrt{R^2 \text{Cos}[t]^2 + R^2 \text{Sin}[t]^2}$

```
Integrate[Sqrt[Dx^2 + Dy^2], {t, 0, Pi}, Assumptions → R > 0]
```

π R

```
Clear[x]
```

Zadanie

Oblicz długośc krzywej

$f(x) = \sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{3}$

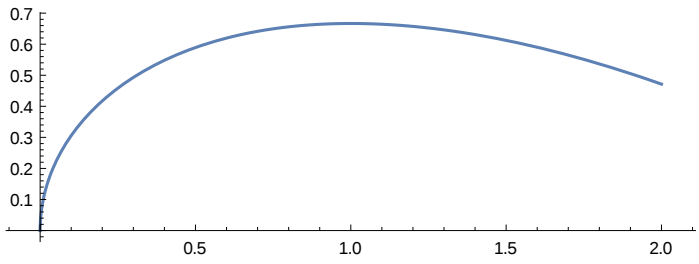
a) najpierw całkując f(x) po zmiennej x od 0 do 2

b) przekształcić wyrażenie podcalkowe wprowadzając parametryzację:

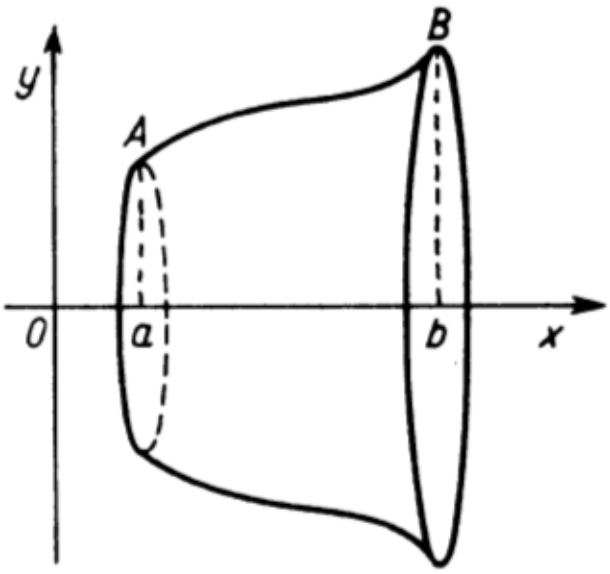
$x(t) = t^2$

$y(t) = t - \frac{t^3}{3}$

i wycałkować po t



Bryły obrotowe – objętość i pole powierzchni



$$S = 2\pi \int_A^B y\, dL = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$y = f(x)$$

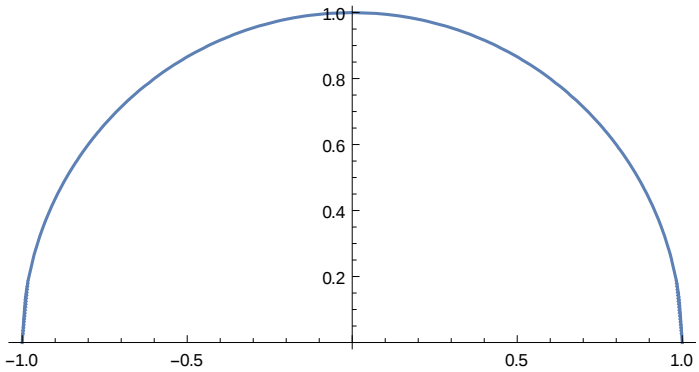
$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Jesli wprowadzimy parametryzacje:
x=x(t) i y=y(t)

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \left| \frac{dx}{dt} \right| dt$$

Przykład:
Obliczmy pole i objętość figury powstałej przez obrót krzywej f(x)=$\sqrt{R^2 + x^2}$ wokół osi Ox (kula)



```
Clear[x]
```

```
f[x_] = Sqrt[R^2 - x^2]
```

$$\sqrt{R^2 - x^2}$$

```
Df = D[f[x], x]
```

$$-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

```
2 Pi Integrate[f[x] Sqrt[1 + Df^2], {x, -R, R}, Assumptions → R > 0]
```

$$4 \pi R^2$$

```
Pi Integrate[f[x] ^2 , {x, -R, R}, Assumptions → R > 0]
```

$$\frac{4 \pi R^3}{3}$$

Wprowadzamy parametryzację
x=R cos(t)
y=R sin(t)

```
x[t_] = R Cos[t]
y[t_] = R Sin[t]
```

```
R Cos[t]
```

```
R Sin[t]
```

```
2 Pi
 Integrate[y[t] Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2], {t, 0, Pi}, Assumptions → R > 0]
```

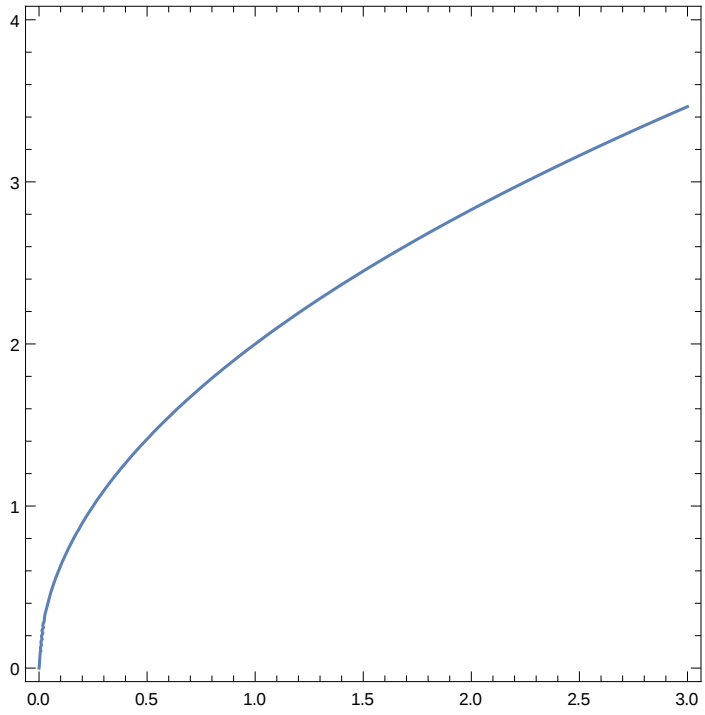
$$4 \pi R^2$$

```
Pi Integrate[y[t] ^2 Abs[D[x[t], t] ], {t, 0, Pi}, Assumptions → R > 0]
```

$$\frac{4 \pi R^3}{3}$$

Zadanie

Oblicz pole i objętość figury powstałej przez obrót krzywej $y = 2\sqrt{x}$ wokół osi Ox
a) najpierw całkując po zmiennej x od 0 do 3
b) przekształcić wyrażenie podcalkowe wprowadzając parametryzację:
$x(t) = t^2$
$y(t) = 2t$
i wycałkować po t


4
3
2
1
0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0