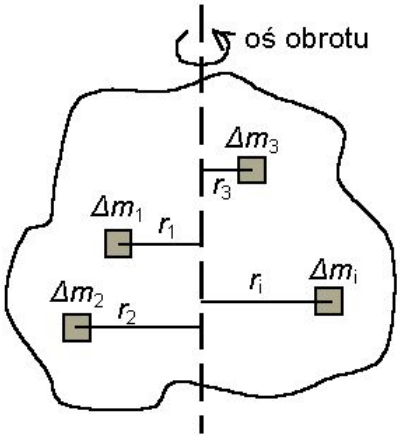
Analiza matematyczna 1a
Zajęcia nr 7

Moment bezwładności figur względem osi



$$I = \int_V r^2 \, dm$$

niech ρ to stała gęstość, $V\rho = M$

$$dm = \rho \, dv = \frac{M}{V} dv$$

$$I = \frac{M}{V} \int_V r^2 \, dv$$

niech σ to stała gęstość powierzchniowa, $\sigma S = M$

$$dm = \sigma \, ds = \frac{M}{S} ds$$

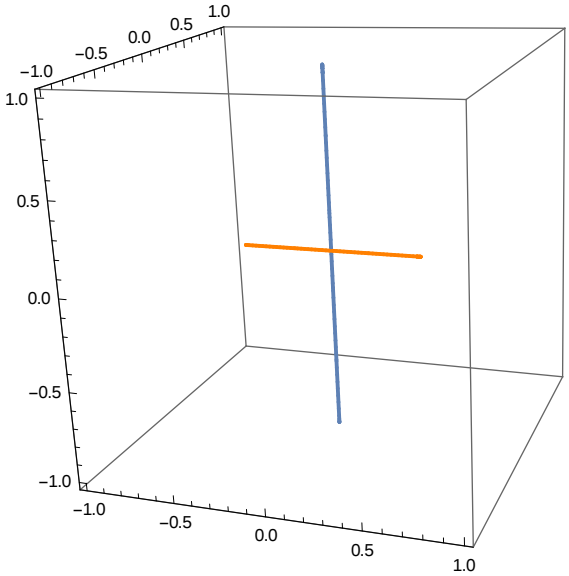
$$I = \frac{M}{S} \int_S r^2 \, ds$$

niech λ to stała gęstość liniowa, $\lambda L = M$

$$dm = \lambda \, dL = \frac{M}{L} dL$$

$$I = \frac{M}{L} \int_L r^2 \, dL$$

Moment bezwładności cienkiego pręta względem osi prostopadłej do niego, przechodzącej przez jego środek

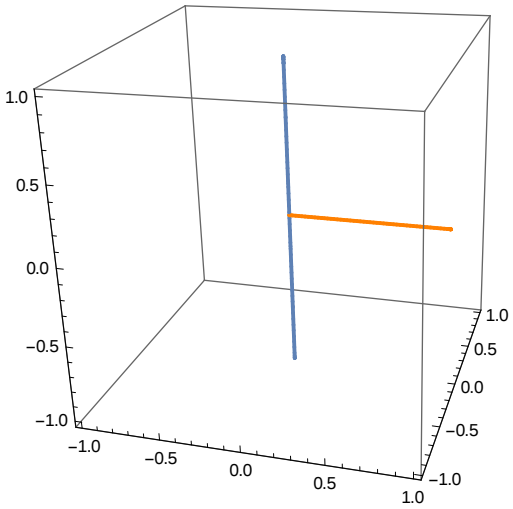



```
M / L * Integrate[x^2, {x, -L / 2, L / 2}, Assumptions → {L > 0}]
```

$$\frac{L^2\,M}{12}$$

Zadanie 1

Oblicz moment bezładności cienkiego pręta o długości L
wzgędem osi prostopadłej do niego, przechodzacej przez jego koniec



Obszarygeometryczne

Okrąg

```
Circle[{0, 0}, R]
```

```
? Circle
```

Circle[{x, y}, r] represents a circle of radius r centered at {x, y}.
Circle[{x, y}] gives a circle of radius 1.
Circle[{x, y}, {r_x, r_y}] gives an axis–aligned ellipse with semi–axes lengths r_x and r_y.
Circle[{x, y}, …, {θ_1, θ_2}] gives a circular or ellipse arc from angle θ_1 to θ_2. >>

Przykład: obwód okręgu

$$\int_{\text{okrąg}} dL$$

```
Integrate[1, {x, y} ∈ Circle[{0, 0}, R, {0, 2 Pi}], Assumptions → R > 0]
```

$2\,\pi\,R$

Dysk(pełnekoło)

```
Disk[{0, 0}, R]
```

```
? Disk
```

Disk[{x, y}, r] represents a disk of radius r centered at {x, y}.
Disk[{x, y}] gives a disk of radius 1.
Disk[{x, y}, {r_x, r_y}] gives an axis–aligned elliptical disk with semiaxes lengths r_x and r_y.
Disk[{x, y}, …, {θ_1, θ_2}] gives a sector of a disk from angle θ_1 to θ_2. >>

Przykład: pole koła

$$\int_{\text{koło}} ds$$

```
Integrate[1, {x, y} ∈ Disk[{0, 0}, R, {0, 2 Pi}], Assumptions → R > 0]
```

$\pi\,R^2$

Przykład: pole elipsy

$$\int_{\text{elipsa}} ds$$

```
Integrate[1, {x, y} ∈ Disk[{0, 0}, {a, b}, {0, 2 Pi}], Assumptions → {a > 0, b > 0}]
```

$a\,b\,\pi$

Sfera

```
Sphere[{0, 0, 0}, R]
```

```
? Sphere
```

Sphere[p] represents a unit sphere centered at the point p.
Sphere[p, r] represents a sphere of radius r centered at the point p.
Sphere[{p_1, p_2, …}, r] represents a collection of spheres of radius r. »

Przykład: pole sfery

$$\int_{\text{sfera}} \mathrm{ds}$$

```
Integrate[1, {x, y, z} ∈ Sphere[{0, 0, 0}, R], Assumptions → R > 0]
```

$4\,\pi\,R^2$

Kula

```
Ball[{0, 0, 0}, R]
```

```
? Ball
```

Ball[p] represents the unit ball centered at the point p.
Ball[p, r] represents the ball of radius r centered at the point p.
Ball[{p_1, p_2, …}, r] represents a collection of balls of radius r. »

Przykład: objętość kuli

$$\int_{\text{kula}} \mathrm{dv}$$

```
Integrate[1, {x, y, z} ∈ Ball[{0, 0, 0}, R], Assumptions → R > 0]
```

$$\frac{4\,\pi\,R^3}{3}$$

Walec

```
Cylinder[{{0, 0, 0}, {0, 0, h}}, R]
```

```
? Cylinder
```

Cylinder[{{x_1, y_1, z_1}, {x_2, y_2, z_2}}, r] represents
a cylinder of radius r around the line from (x_1, y_1, z_1) to (x_2, y_2, z_2).
Cylinder[{{x_1, y_1, z_1}, {x_2, y_2, z_2}}] represents a cylinder of radius 1. »

Przykład: objętość walca

$$\int_{\text{walec}} \mathrm{dv}$$

```
Integrate[1, {x, y, z} ∈ Cylinder[{{0, 0, 0}, {0, 0, h}}, R],
 Assumptions → {R > 0, h > 0}]
```

$h \pi R^2$

Prostopadlościan

```
Cuboid[{0, 0, 0}, {a, b, c}]
```

```
? Cuboid
```

Cuboid[p_{min}] represents a unit hypercube with its lower corner at p_{min}.
Cuboid[p_{min}, p_{max}] represents an
axis–aligned filled cuboid with lower corner p_{min} and upper corner p_{max}. »

Przykład: objętość prostopadłościanu

$$\int_{\text{prostopadłościan}} dv$$

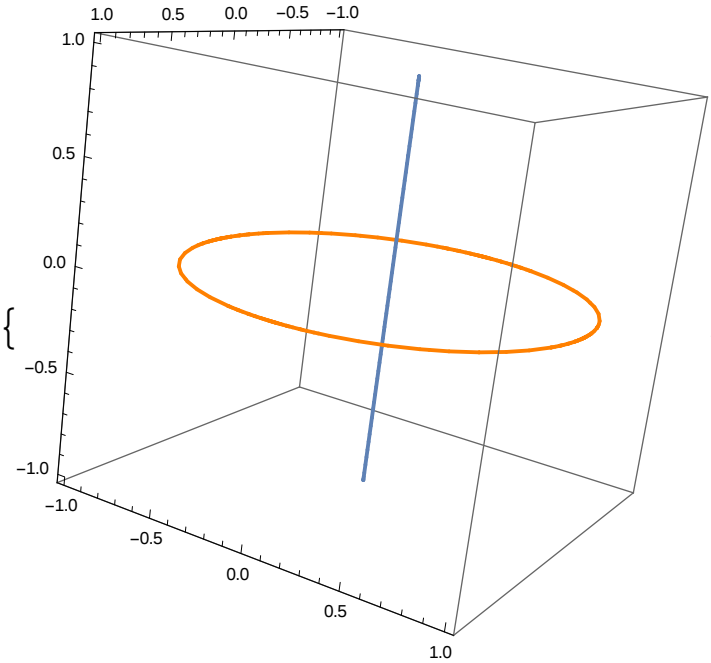
```
Integrate[1, {x, y, z} ∈ Cuboid[{0, 0, 0}, {a, b, c}],
 Assumptions → {a > 0, b > 0, c > 0}]
```

a b c

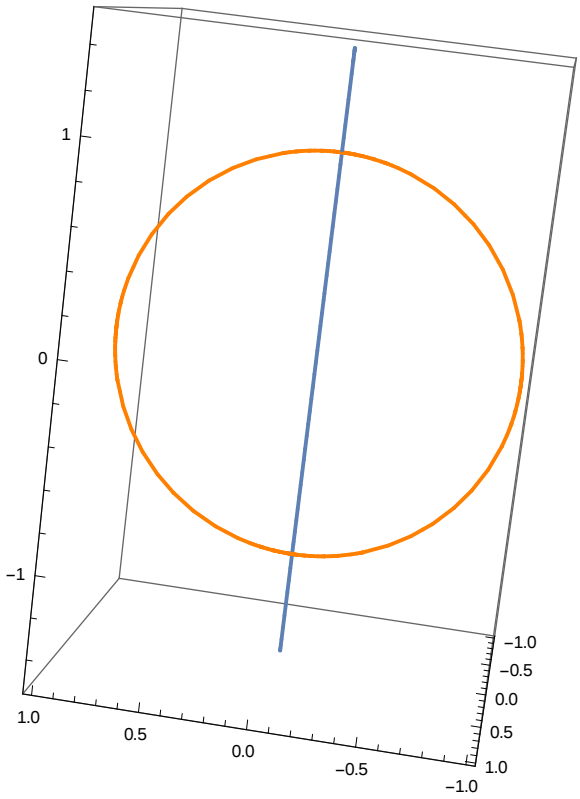
Zadanie 2

Oblicz moment bezładności obręczy o promieni R
a) wzgędem osi prostopadłej do jej płaszczyzny
b) wzgędem osi równoległej do jej płaszczyzny

{


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

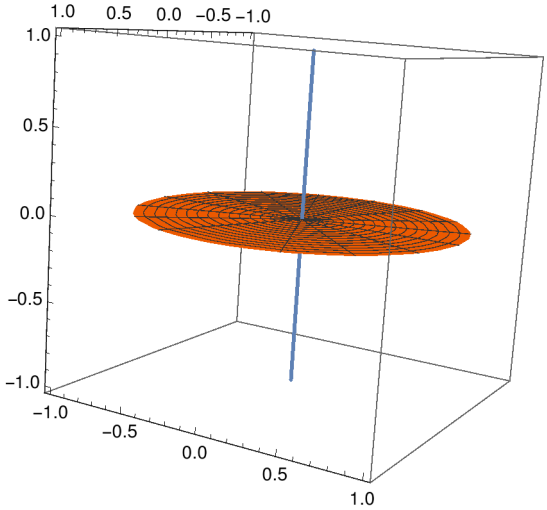
,


1
0
−1
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

}

Figry 2D

Moment bezwładności dysku względem osi prostopadłej do jego płaszczyzny




```
S = Pi R^2
```

πR^2

```
M / S * Integrate[x^2 + y^2, {x, y} ∈ Disk[{0, 0}, R], Assumptions → {R > 0}]
```

$$\frac{M R^2}{2}$$

Zadanie 3

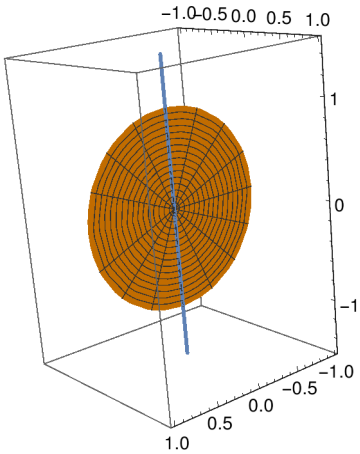
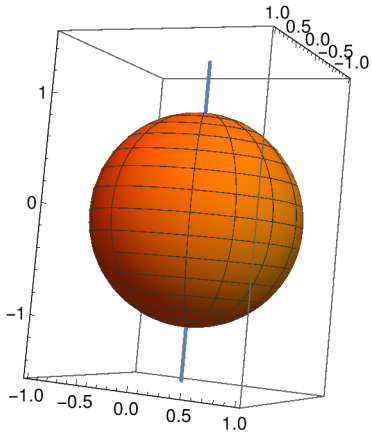
Oblicz moment bezładności

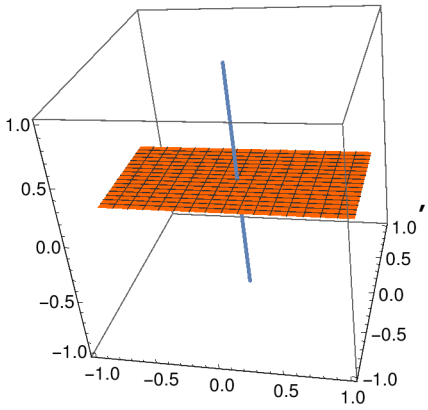
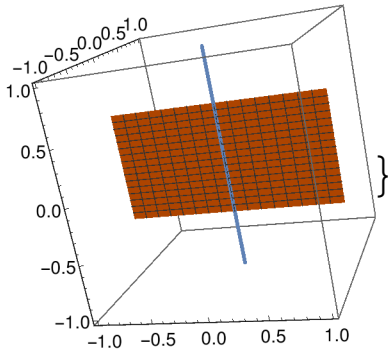
a) dysku o promieniu R względem osi równoległej do jego płaszczyzny

b) sfery o promieniu R

c) prostokąta o bokach a i b względem osi prostopadłej do jego płaszczyzny

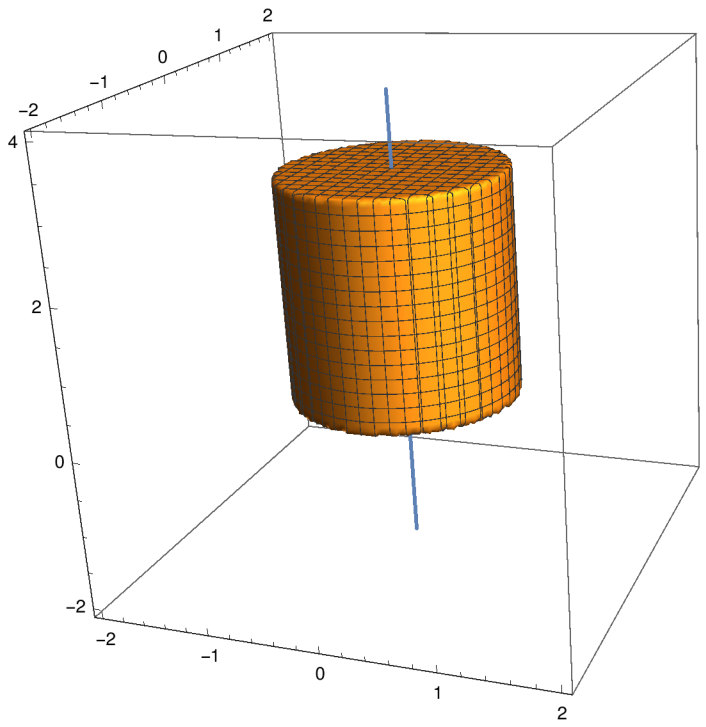
d) prostokąta o bokach a i b względem osi równoległej do jego płaszczyzny

{  ,  ,

 ,  }

Figry 3D

Moment bezwladnosci walca wzgędem osi równoległej do jego wysokości




```
M / V * Integrate[(x^2 + y^2),
  {x, y, z} ∈ Cylinder[{{0, 0, 0}, {0, 0, h}}, R], Assumptions → {R > 0, h > 0}]
```

$$\frac{M R^2}{2}$$

```
V = Integrate[1,
  {x, y, z} ∈ Cylinder[{{0, 0, 0}, {0, 0, h}}, R], Assumptions → {R > 0, h > 0}]
```

$$h \pi R^2$$

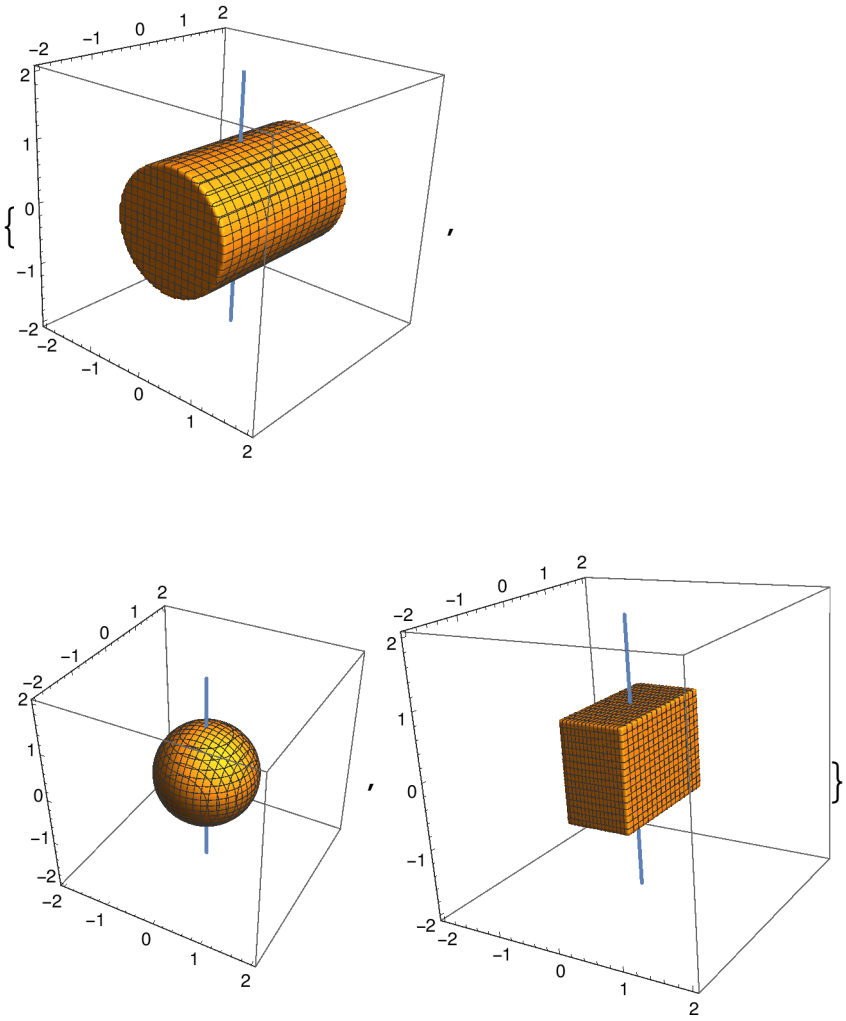
Zadanie 4

Oblicz moment bezładności

a) walca o promieniu R i wysokości h wzgędem osi prostopadłej do jego wysokości

b) kuli o promieniu R

c) prostopadłościanu o bokach a,b i c



Gęstość niejednorodna

Załozmy że ciało nie ma jednorodnej gestości

$$I = \int_V r^2 \, dm$$

niech $\rho=\rho(x,y,z)$ to gęstość

$$M = \int_V \rho dv$$

Nie możemy wyciągnąć ρ przed całkę ponieważ ρ zależy od położenia

$$dm = \rho \, dv$$

$$I = \int_V r^2 \rho \, dv$$

niech σ to gęstość powierzchniowa

$$M = \int_S \sigma \, ds$$

$$dm = \sigma \, ds$$

$$I = \int_S \sigma \, r^2 \, ds$$

niech λ to gęstość liniowa

$$M = \int_L \lambda \, dL$$

$$dm = \lambda \, ds$$

$$I = \int_L \lambda \, r^2 \, dL$$

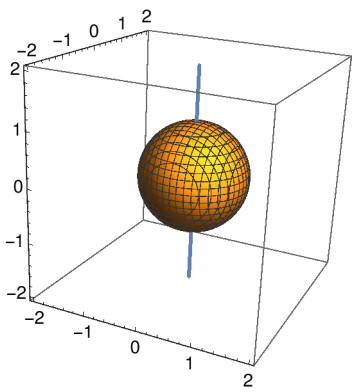
Zadanie 5

Gęstość kuli jest proporcjonalna do odległości od środka.

$\rho(x,y,z) = \alpha \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

a) Jak współczynnik α wyraza sie przez promień R i masę kuli M?

b) Oblicz moment bezładności kuli względem osi przechodzacej przez jej srodek.



Zadanie 6

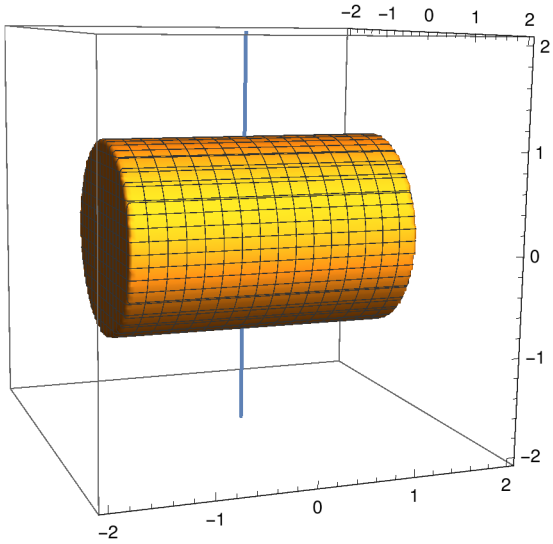
Gęstość walca o wysokości h zmienia sie wzdłuz jego wysokości (oś x) i wyraża sie przez funkcję

$\rho(x,y,z) = \beta \cos\left(\frac{x\pi}{h}\right)$

czyli przy podstawach (x=±h/2) gęstośc $\rho = 0$, a w środku walca $\rho(x=0)=\beta$

a) Jak współczynnik β wyraza sie przez promień R, h i masę walca M?

b) Oblicz moment bezładności walca względem osi prostopadlej do jego wysokości.



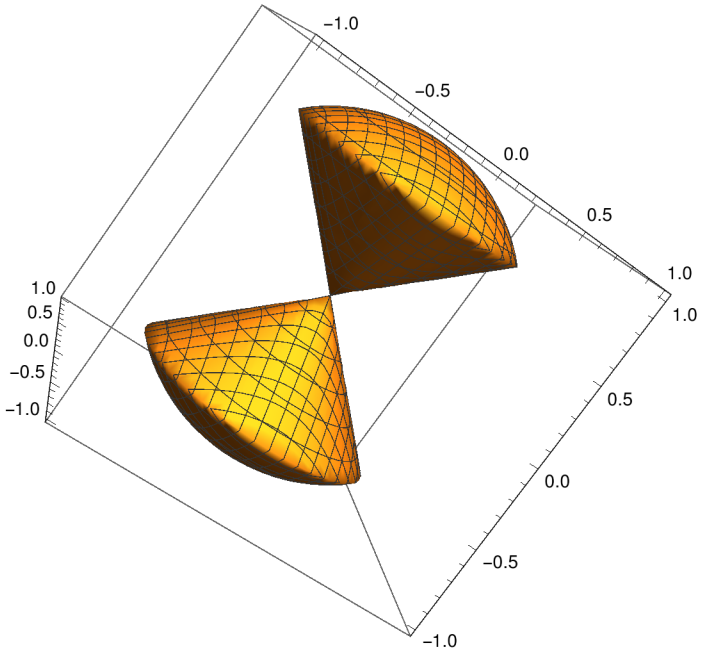
If

```
? If
```

If[*condition* , *t* , *f*] gives *t* if *condition* evaluates to True, and *f* if it evaluates to False.
If[*condition* , *t* , *f* , *u*] gives *u* if *condition* evaluates to neither True nor False. »

If[warunek, t, f] zwraca t jesli warunek jest spelniony, a f jesli nie jest spełniony

```
RegionPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 < 1 && x^2 + y^2 < z^2,
 {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, PlotPoints → 35]
```



Objętoć figury

```
Integrate[ If[x^2 + y^2 + z^2 < 1 && x^2 + y^2 < z^2 , 1, 0],
 {x, -∞, ∞} , {y, -∞, ∞}, {z, -∞, ∞}]
```

$$-\frac{2}{3}\left(-2\pi+\sqrt{2}\,\pi\right)$$

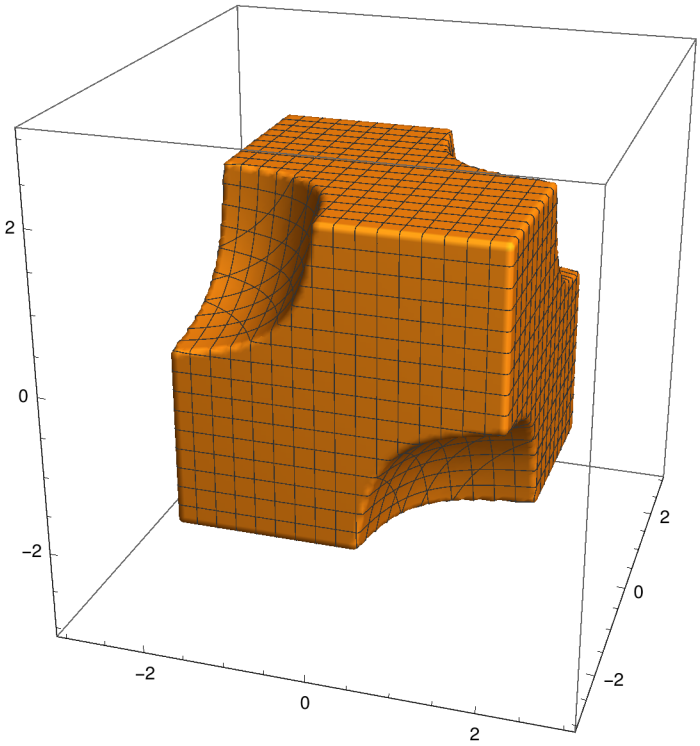
Zadanie 7

Obliczyć moment bezwładności powyższej figury względem
a) osi symetrii (Oz)
b) osi prostopadłej do osi symetrii

ρ=const

Zadanie 8

Obliczyć objętość i moment bezwładności figury względem osi Oz

ρ=const

```
RegionPlot3D[x y z < 1 && x^2 < 4 && y^2 < 4 && z^2 < 4,
 {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -3, 3}, PlotPoints → 100]
```