Analiza matematyczna 3

Pochodna funkcji

pierwsza pochodna:

```
x'[t]
```

```
x′[t]
```

```
Derivative[1][x][t]
```

$x'(t)$

```
D[x[t], t]
```

$x'(t)$

7. pochodna:

```
Derivative[7][x][t]
```

$x^{(7)}(t)$

```
D[x[t], {t, 7}]
```

$x^{(7)}(t)$

pochodne funkcji wielu zmiennych:

```
D[x[t1, t2], t1]
```

$x^{(1,0)}(\mathrm{t1}, \mathrm{t2})$

```
Derivative[1, 0][x][t1, t2]
```

```
x(1,0)[t1, t2]
```

```
D[x[t1, t2], {t1, 2}, {t2, 3}]
```

$x^{(2,3)}(\mathrm{t1}, \mathrm{t2})$

```
Derivative[2, 3][x][t1, t2]
```

$x^{(2,3)}(\mathrm{t1}, \mathrm{t2})$

Równania różniczkowe

Przykłady równań:

a)

```
x'[t] - 5 * x[t] == 1
```

$x'(t) - 5\, x(t) = 1$

b)

```
x''[t] + 4 x[t] == 7
```

$x''(t) + 4\, x(t) = 7$

c) układ równań

```
{x1'[t] == x1[t] - 2 x2[t], x2'[t] == x1[t] - x2[t]}
```

$\{\mathrm{x1}'(t) = \mathrm{x1}(t) - 2\,\mathrm{x2}(t),\ \mathrm{x2}'(t) = \mathrm{x1}(t) - \mathrm{x2}(t)\}$

d) rownanie z warunkiem poczatkowym

```
{x'[t] - 5 * x[t] == 1, x[0] == 5}
```

$\{x'(t) - 5\, x(t) = 1,\ x(0) = 5\}$

DSolve

```
? DSolve
```

DSolve[eqn, y, x] solves a differential equation for the function y, with independent variable x.
DSolve[eqn, y, {x, x_{min}, x_{max}}] solves a differential equation for x between x_{min} and x_{max}.
DSolve[{eqn_1, eqn_2, …}, {y_1, y_2, …}, …] solves a list of differential equations.
DSolve[eqn, y, {x_1, x_2, …}] solves a partial differential equation. »

Przykłady

a)

```
DSolve[x'[t] - 5 * x[t] == 1, x[t], t]
```

$$\left\{\left\{x(t) \to c_1 e^{5t} - \frac{1}{5}\right\}\right\}$$

b)

```
DSolve[x''[t] + 4 x[t] == 7, x[t], t]
```

$$\left\{\left\{x(t) \to c_2 \sin(2t) + c_1 \cos(2t) + \frac{7}{4}\right\}\right\}$$

Zadanie 1

Rozwiąż rownania różniczkowe:

a) $2x'(t) + x(t) = 0$

b) $x''(t) - 6x'(t) + 13x(t) = 0$

c) $t^3 x'''(t) + 2t^2 x''(t) - t x'(t) + x = 12 t^2$

Układ równań

Przykład

```
DSolve[{x1'[t] == x1[t] - 2 x2[t], x2'[t] == x1[t] - x2[t]}, {x1[t], x2[t]}, t]
```

$$\{\{\text{x1}(t) \to c_1 (\sin(t) + \cos(t)) - 2 c_2 \sin(t),\ \text{x2}(t) \to c_1 \sin(t) + c_2 (\cos(t) - \sin(t))\}\}$$

Zadanie 2

Rozwiąż uklady rownan:

a) $x'(t) = x(t) + 3y(t)$
$y'(t) = 5x(t) + 3y(t)$

b) $x''(t) = 4y(t) + e^t$
$y''(t) = 4x(t) - e^t$

Rownanie z warunkiem poczatkowym

Przyklad

```
DSolve[{ x'[t] - 5 * x[t] == 1, x[0] == 5}, x[t], t]
```

$\{x'(t) - 5\, x(t) = 1,\ x(0) = 5\}$

Zadanie 3

Rozwiaz rownania rozniczkowe z warunkiem poczatkowym

a) $x'(t) = 4(t^2+1)$, $x(\pi/4)=1$

b) $t\, x'(t) + x(t) = e^{t}$, $x(1)=2$

c) $L \frac{dJ}{dt} + R\, J(t) = \mathcal{E}$, $J(0)=Jo$

Zad 4

Rozwiaz rownanie ruchu z siła harmoniczną i z tłumieniem

$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\, b\, \frac{dx}{dt} + \omega^2\, x = 0$

z warunkami poczatkowymi x(0)=0, x’(0)=1

Zapisz rowiazanie w postaci funkcji x[t,b,ω]

narysuj wykres x od t:

- dla b=8, ω=4
- dla b=1, ω=8
- dla b=3=ω (najpierw policz granice funkcji x gdy ω->b)

Zad 5

Rozwiaz rownanie ruchu z siła harmoniczną, z tłumieniem i z sila wymuszajaca

$(d^2 x)/dt^2 + 2b\, x' + \omega^2\, x$ == F Sin[Ω t] z warunkami poczatkowymi x(0)=0, x'(0)=1

Zapisz rowiazanie w postaci funkcji x[t,b,ω,F, Ω]

Narysuj wykresy od t dla Ω = CzestoscRez[b,ω]
gdzie
CzestoscRez[b_,ω_]=Sqrt[ω^2-2 b^2]

Narysuj wykres x od t:
- dla b=0.1, ω=8 , F=1 (slabe tlumienie)
- dla b=2, ω=8 , F=1 (silne tlumienie)

Wrońskian

In[16]:=
```
? Wronskian
```

Wronskian[{y_1, y_2, …}, x] gives the Wronskian determinant for the functions y_1, y_2, … depending on x.
Wronskian[eqn, y, x] gives the Wronskian determinant for the basis of the solutions of the linear differential equation eqn with dependent variable y and independent variable x.
Wronskian[$eqns$, {y_1, y_2, …}, x] gives the Wronskian determinant for the system of linear differential equations $eqns$. >>

Przykład

x''(t) + 2 x'(t) + x(t) =0

In[1]:=
```
roz = DSolve[x''[t] + 2 x'[t] + x[t] == 0, x[t], t]
```
Out[1]= $\{\{x(t) \to c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} t\}\}$

In[2]:=
```
f1[t_] = x[t] /. roz[[1, 1]] /. {C[1] → 0, C[2] → 1}
```
Out[2]= $e^{-t} t$

In[3]:=
```
f2[t_] = x[t] /. roz[[1, 1]] /. {C[1] → 1, C[2] → 0}
```
Out[3]= e^{-t}

In[5]:=
```
Wronskian[{f1[t], f2[t]}, t]
```
Out[5]= $-e^{-2t}$

Zad 6

rozwiaz rownanaia i znajdz wronskiany rozwiazań:

a) $t^2 x''(t) + 3\, t\, x'(t) + x(t) = 0$
b) $\left(1 - t^2\right) x'' - 2\, t\, x'(t) + n(n+1)\, x(t) = 0$
c) $t^2\, x'' - 2t\, x'(t) + \left(t^2 - 1\right) x(t) = 0$

Równanie Legendre'a i wielomiany Legendre'a

Zad 7

Dla równania z zad 6 punkt b)
$\left(1 - t^2\right) x''(t) - 2\, t\, x'(t) + n(n+1)\, x(t) = 0$
wypisz rozwiązania dla n od 0 do 5 przy pomocy pętli Do

Przykład użycia pętli Do

```
Do[
 Print[ Subscript[i, n], "=", n], {n, 0, 5}
 ]
```

i_0=0

i_1=1

i_2=2

i_3=3

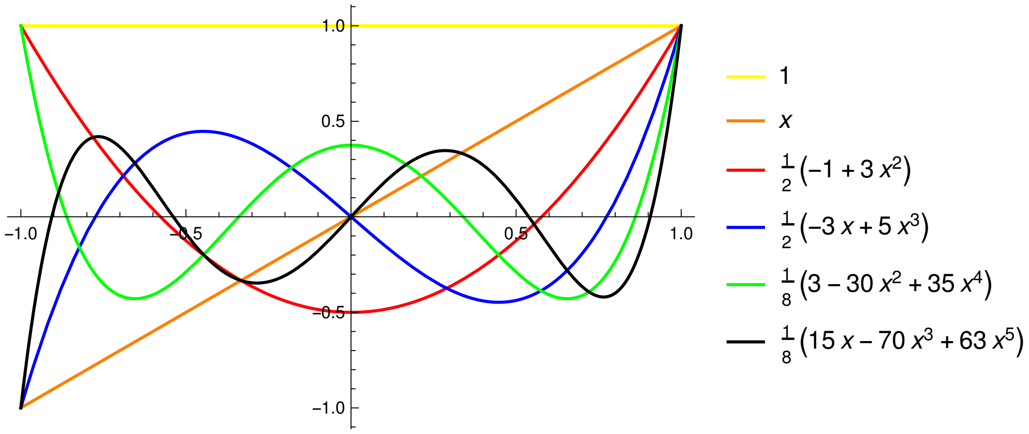
i_4=4

i_5=5

Zad 8

Narysuj wielominanu Lagrandre'a od n=0 do n=5

Out[58]=



Zad 9

Rozwiazac równanie rekurencyjne przy pomocy RSolve :
$(n+1)\, a_{n+1} = (2n+1)\, t\, a_n - n\, a_{n-1}$

In[36]:=
```
? RSolve
```

RSolve[*eqn*, *a*[*n*], *n*] solves a recurrence equation for *a*[*n*].
RSolve[{eqn_1, eqn_2, …}, {$a_1[n]$, $a_2[n]$, …}, *n*] solves a system of recurrence equations.
RSolve[*eqn*, *a*[n_1, n_2, …], {n_1, n_2, …}] solves a partial recurrence equation. ≫

Stowarzyszone funkcje Legendre'a

Zad 10

Rozwiazać stowarzyszone równanie Legendre'a
$(1-t^2)$x'' - 2 t x'(t) + n(n+1) x(t) - m^2/(1-t^2) x(t) =0

n=0,1,2,3...
m=0,1,..,n
wypisz kilka pierwszych funkcji
LegendreP[n,m,t]
oraz
LegendreP[n,m,Cos[z]] , z załozeniem 0<z<π