AnalizaMatematyczna3

Zad 1

zdefinuj funkcję

Y(l,m,theta,phi)= $(-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\text{theta}))\, e^{i\, m\, \text{phi}}$

oraz

a) R21(r) = $\sqrt{\frac{1}{a0^5}} \frac{r\, e^{-\frac{r}{2\, a0}}}{2\sqrt{6}}$

b) R31(r) = $\frac{1}{27} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{a0^5}}\, r\, e^{-\frac{r}{3\, a0}} \left(4 - \frac{2r}{3\, a0}\right)$

c) R32(r) = $\frac{2}{81} \sqrt{\frac{2}{15\, a0^7}}\, e^{-\frac{r}{3\, a0}} r^2$

a0=1

narysuj DensityPlot funkcji :

a) $|$ R21(r) Y (1, 0, theta, psi) $|^2$

b) $|$ R31(r) Y (1, 0, theta, psi) $|^2$

c) $|$ R32(r) Y (2, 0, theta, psi) $|^2$

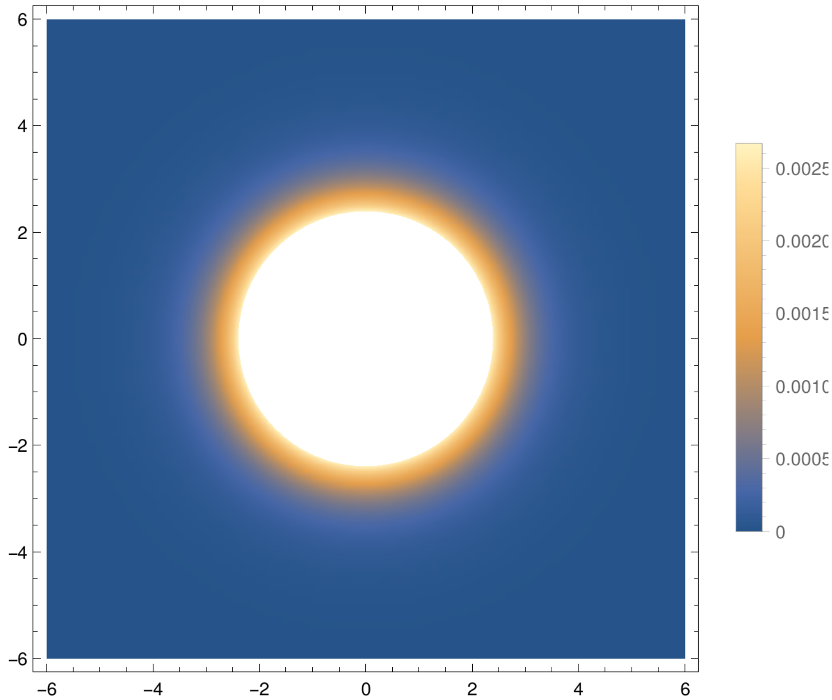
Przykład:

R10(r) Y(0,0,theta,phi)

```
R10[r_] = 2 Exp[-r / a0] / Sqrt[a0] ^3
```

$2\, e^{-r}$

```
DensityPlot[(Abs[R10[Sqrt[x^2 + z^2]] Y[0, 0, ArcTan[x / z], 0]])^2,
 {x, -6 a0, 6 a0}, {z, -6 a0, 6 a0}, PlotLegends → Automatic , PlotPoints → 100]
```

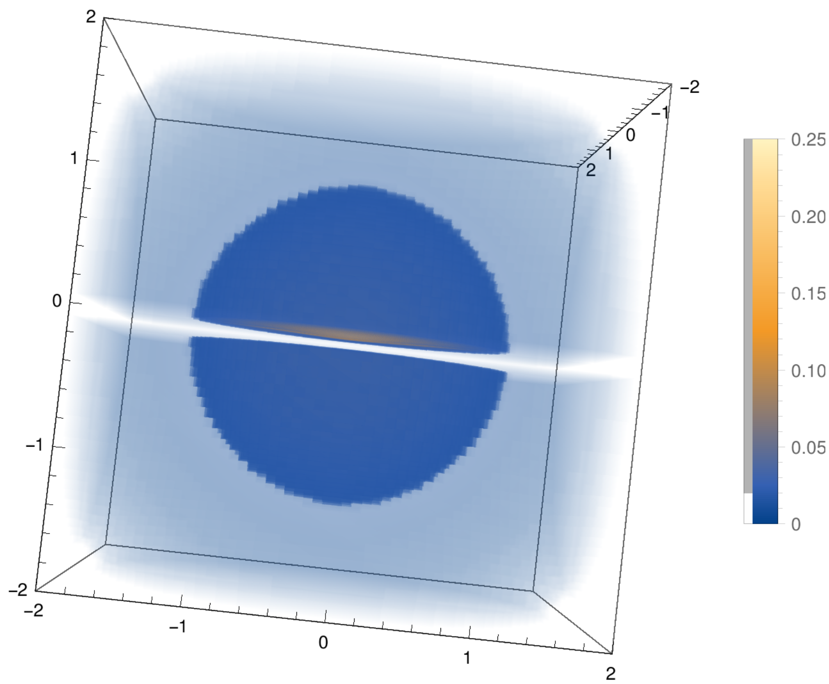



```
a0 = 1
```

1

```
(*DensityPlot3D od wersji 10.2*)
```

```
DensityPlot3D[
 (Abs[R10[Sqrt[x^2 + y^2 + z^2]] * Y[0, 0, ArcTan[Sqrt[x^2 + y^2] / z], ArcTan[x / y]]]) ^
  2,
 {x, -2 a0, 2 a0}, {y, -2 a0, 2 a0}, {z, -2 a0, 2 a0}, PlotLegends → Automatic]
```



Zad 2

Wieomiany Legendre'a tworza baze ortogonalna funkcji w przedziale [-1,+1].
Znajdz wspolczynniki f_n rozwiniecia funkcji wzgledem bazy wielomianow Legendre'a
f(t)=$\sum f_n P_n$(t)

$$f_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(t)\, f(t)\, dt$$

a) $f(t) = t^2$
b)$f(t) = \sin(t\pi)$ (3 pierwsze niezerowe wspolczniki, zrób wkres funkcji f(t) oraz przyblizenia $f_1 P_1$(t)+$f_3 P_3$(t)+$f_5 P_5$(t)

Przykład:

```
f[t_] = t^3
```

t^3

```
f[n_] = Integrate[LegendreP[n, t] f[t], {t, -1, 1}] (2 n + 1) / 2
```

$$-\frac{(2 n + 1) \left(n^2 + n - 8\right) \sin(\pi n)}{\pi (n - 3) (n - 1) (n + 2) (n + 4)}$$

```
Limit[f[m], m → 1]
```

$\frac{3}{5}$

```
Limit[f[m], m → 3]
```

$\frac{2}{5}$

```
Simplify [Limit[f[m], m → 1] LegendreP[1, t] + Limit[f[m], m → 3] LegendreP[3, t]]
```

t^3

Wielomiany Bessela i Hermitea

Zad 3

Rozwiazac równanie Bessela i Hermite’a:

t^2 x’’(t) + t $x'(t)$ + $(t$ ^2 $-$ n^2 $) x(t)$ =0

x’’(t) - 2t $x'(t)$ +2 n x(t) =0

Zad 4

Rozwiazac równania rekurencyjne przy pomocy RSolve :

t a_{n+1}- 2n a_n + t a_{n-1} =0

a_{n+1}- 2 t a_n + 2 n a_{n-1} =0

Zad 5

Narysuj funkcje BesselJ oraz HermiteH dla n=0-5

Zad 6

Rozwazmy 2-wymiarowe rowanie falowe w spolrzednych biegunowych

$u_{tt}(r,\alpha,t) - c^2 \Delta u(r,\alpha,t) = 0$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$

rozwiazanie ma postac

$u(r,\alpha,t)=T(t)\,A(\alpha)\,x(r)$

Rozwiaz rownania

$T''(t) = -c^2 m^2 T(t)$

$A''(\alpha) = -n^2 A(\alpha)$

$r^2 x''(r) + r\,x'(r) + x(r)\left(m^2 r^2 - n^2\right) = 0$

dla warunkow poczatkowych x[1]==0,x'[1]==1 i A[0]==0,A'[0]==1

narysuj wykres Plot3D funkcji $A(\alpha)\,x(r)$ dla parametrow m=2, n=1

Zad 7

Rownanie oscylatora harmonicznego ma postac

$x''(t) - k^2 t^2 x(t) + k\,(2n+1)\,x(t) = 0$

$\left(k = \frac{m\omega}{\hbar}\right)$

Rozwiąż równanie i narysuj pierwsze z rozwiazan dla n=0-4 i k=1.

Zad 8

Znajac funkcje tworzące wielomianów Hermite'a i Legendre'a wyznacz kilka pierwszych wielomianów H_n i P_n

$G(t,\lambda)=e^{2\lambda t-\lambda^2}$

$G2(t,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-2\lambda t+1}}$

Zad 9

Udowaodnic że

$$J_0(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(t) = 1$$