Matematyka 3

Suma szeregu

```
? Sum
```

Sum[f, {i, i_{max}}] evaluates the sum $\sum_{i=1}^{i_{max}} f$.
Sum[f, {i, i_{min}, i_{max}}] starts with $i = i_{min}$.
Sum[f, {i, i_{min}, i_{max}, di}] uses steps di.
Sum[f, {i, {i_1, i_2, ...}}] uses successive values i_1, i_2, ...
Sum[f, {i, i_{min}, i_{max}}, {j, j_{min}, j_{max}}, ...] evaluates the multiple sum $\sum_{i=i_{min}}^{i_{max}} \sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} \ldots f$.
Sum[f, i] gives the indefinite sum $\sum_i f$. >>

Przykład 1:

```
Sum[1 / ((n + 1) * n), {n, 1, Infinity}]
```

1

Przykład 2:

```
Sum[α^n, {n, 1, Infinity}]
```

$$-\frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Promień zbieżności szeregu

GenerateConditions

Parametr funkcji Sum: GenerateConditions→True
Pokazuje wynik i warunek
Sum[expr, {n, n_{min}, n_{max}} , GenerateConditions→True]

```
? GenerateConditions
```

GenerateConditions is an option for Integrate, Sum, and similar functions that specifies whether explicit conditions on parameters should be generated in the result. >>

Przykład 1:

```
Sum[1 / ((n + 1) * n), {n, 1, Infinity}, GenerateConditions → True]
```

1

Przykład 2:

```
Sum[α^n, {n, 1, Infinity}, GenerateConditions → True]
```

ConditionalExpression$\left[-\frac{\alpha}{\alpha-1}, |\alpha|<1\right]$

SumConvergence

Pokazuje warunek dla którego suma jest zbieżna

```
? SumConvergence
```

SumConvergence[f, n] gives conditions for the sum $\sum_{n}^{\infty} f$ to be convergent.

SumConvergence[f, {n_1, n_2, ...}] gives conditions for the multiple sum $\sum_{n_1}^{\infty}\sum_{n_2}^{\infty} \ldots f$ to be convergent. >>

Przykład 1:

```
SumConvergence[1 / ((n + 1) * n), n]
```

True

Przykład 2:

```
SumConvergence[α^n, n]
```

$|\alpha| < 1$

Zadanie 1

Policz:
- sumy szeregów przy pomocy funkcji Sum[] z opcją GenerateConditions->True
- warunek zbieżności przy pomocy funkcji SumConvergence[]

a) $\frac{(-1)^{n+1} t^n}{n}$

b) $\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$

c) $2^{-n} t^n$

Równania rekurencyjne
RSolve

Rozwiązuje równanie rekurencyjne

```
? RSolve
```

RSolve[*eqn*, *a*[*n*], *n*] solves a recurrence equation for *a*[*n*].
RSolve[{eqn_1, eqn_2, …}, {$a_1[n]$, $a_2[n]$, …}, *n*] solves a system of recurrence equations.
RSolve[*eqn*, $a[n_1, n_2, \ldots]$, {n_1, n_2, …}] solves a partial recurrence equation. >>

Przykład:

$a_{n+1} = -\frac{2\,a_n}{n+1}$ z warunkiem początkowym a_o = a0

```
RSolve[{a[n + 1] == -2 a[n] / (n + 1), a[0] == a0}, a[n], n]
```

$$\left\{\left\{a(n) \to \frac{\text{a0}\,(-2)^n}{(2)_{n-1}}\right\}\right\}$$

Symbol Pochhammera

```
Pochhammer[k, n]
```

$(k)_n$

$(k)_n$= Γ(n+k)/ Γ(k)

Dla n∈ N :

$(k)_n = \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!}$

$(1)_n = n!$

Zadanie 2

Wyznacz jawny wzor na a_n dla formuły rekurencyjnej
a_{n+1} =n*a $_n$ z warunkiem początkowym a_1=1

Zapisz rozwiązanie w postaci funkcji G[n]
Ile wynosi G[1/2] ?

Gamma

```
Gamma[n]
```

Dla n∈N
$\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ \frac{(2n)!}{4^n\, n!}$

Zadanie 3

Wyznacz jawny wzor na a_n za pomocą a0 (lub a1) z następujaıcych formuł rekurencyjnych (n ≥ 0)

a) $a_{n+1} = -\frac{(n+2)\, a_n}{2\,(n+1)}$

b) $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)^2}$

c) $a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)\,(n+2)}$

d) $a_{n+2} = \frac{(n+1)\, a_n}{4\,(n+2)}$

Podwójna silnia

(2 n)!! = 1* 2 * 4 * 6 * .... * (2n-2) * (2n)

```
Factorial2[2 n]
```

$(2\,n)!!$

```
(2 n)!!
```

$(2\,n)!!$

```
Table[(2 n)!!, {n, 0, 5}]
```

{1, 2, 8, 48, 384, 3840}

(2 n+1)!! = 1 * 3 * 5 * 7 * .... * (2n-1)

```
(2 n + 1)!!
```

$(2\,n+1)!!$

```
Factorial2[2 n + 1]
```

$(2\,n+1)!!$

```
Table[(2 n + 1)!!, {n, 0, 5}]
```

{1, 3, 15, 105, 945, 10395}

Zadanie 4

Rozwiń funkcje (2n)!! i (2n+1)!! przy pomocy FunctionExpand
następnie uprość wynik przy pomocy Simplify z zalozeniem n∈Integers && n>=0

```
? FunctionExpand
```

FunctionExpand[*expr*] tries to expand out special and certain other functions in *expr*, when possible reducing compound arguments to simpler ones.

FunctionExpand[*expr*, *assum*] expands using assumptions. >>

Pochodna funkcji

```
x'[t]
```

$x'(t)$

```
Derivative[1][x][t]
```

$x'(t)$

```
D[x[t], t]
```

$x'(t)$

```
Derivative[7][x][t]
```

$x^{(7)}(t)$

```
D[x[t], {t, 7}]
```

$x^{(7)}(t)$

```
D[x[t1, t2], t1]
```

$x^{(1,0)}(\mathrm{t1}, \mathrm{t2})$

```
D[x[t1, t2], {t1, 2}, {t2, 3}]
```

$x^{(2,3)}(\mathrm{t1}, \mathrm{t2})$

```
Derivative[2, 3][x][t1, t2]
```

$x^{(2,3)}(\mathrm{t1}, \mathrm{t2})$

Równania różniczkowe

Przykłady równań:

a)

```
x'[t] - 5 * x[t] == 1
```

$x'(t) - 5\, x(t) = 1$

b)

```
x''[t] + 4 x[t] == 7
```

$x''(t) + 4\, x(t) = 7$

c) układ równań

```
{x1'[t] == x1[t] - a x2[t], x2'[t] == x1[t] - x2[t]}
```

$\{\mathrm{x1}'(t) = \mathrm{x1}(t) - a\,\mathrm{x2}(t),\ \mathrm{x2}'(t) = \mathrm{x1}(t) - \mathrm{x2}(t)\}$

d) rownanie z warunkiem poczatkowym

```
{x'[t] - 5 * x[t] == 1, x[0] == 5}
```

$\{x'(t) - 5\, x(t) = 1,\ x(0) = 5\}$

DSolve

```
? DSolve
```

DSolve[eqn, y, x] solves a differential equation for the function y, with independent variable x.
DSolve[eqn, y, {x, x_{min}, x_{max}}] solves a differential equation for x between x_{min} and x_{max}.
DSolve[{eqn_1, eqn_2, ...}, {y_1, y_2, ...}, ...] solves a list of differential equations.
DSolve[eqn, y, {x_1, x_2, ...}] solves a partial differential equation. »

Przykłady

a)

```
DSolve[x'[t] - 5 * x[t] == 1, x[t], t]
```

$$\left\{\left\{x(t) \to c_1\, e^{5t} - \frac{1}{5}\right\}\right\}$$

b)

```
DSolve[x''[t] + 4 x[t] == 7, x[t], t]
```

$$\left\{\left\{x(t) \to c_2 \sin(2\,t) + c_1 \cos(2\,t) + \frac{7}{4}\right\}\right\}$$

Zadanie 5

Rozwiąż rownania różniczkowe:

a) $x'(t) + x(t) = 1+t$

b) $(1 - t^2)\,x''(t) - 6\,t\,x'(t) - 4\,x(t) = 0$

c) $4\,t^2\,x''(t) - 2\,t\,(t+2)\;x'(t) + (t+3)\,x(t) = 0$

d) $2\,t\,x''(t) + 3\,x'(t) - x(t) = 0$

Rownanie z warunkiem poczatkowym

```
DSolve[{x'[t] - 5 * x[t] == 1, x[0] == 5}, x[t], t]
```

$$\left\{\left\{x(t) \to \frac{1}{5}\left(26\,e^{5\,t} - 1\right)\right\}\right\}$$

Zadanie 6

Rozwiaz rownania rozniczkowe z warunkiem poczatkowym

a) $x'(t)$= 4(t^2+1) , x(π/4)=1

b) t $x'(t)$ + x(t) = e^t , x(1)=2

Zad 7

Rozwiaz rownanie ruchu z siła harmoniczną i z tłumieniem

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\,b\,\frac{dx}{dt} + \omega^2\,x \;== 0$$

z warunkami poczatkowymi x(0)=0, x’(0)=1

Zapisz rowiazanie w postaci funkcji x[t,b,ω]

narysuj wykres x od t:
- dla b=8, ω=4
- dla b=1, ω=8
- dla b=3=ω (najpierw policz granice funkcji x gdy ω->b)

Zad 8

Rozwiaz rownanie ruchu z siła harmoniczną, tlumieniem i z sila wymuszajaca

$\frac{d^2 x}{dt^2}$+2b $\frac{dx}{dt}$+ ω^2 x == F Sin[Ω t]

z warunkami poczatkowymi x(0)=0, x’(0)=1

Zapisz rowiazanie w postaci funkcji x[t,b,ω,F, Ω]

Narysuj wykresy od t dla Ω = CzestoscRez[b,ω]
gdzie:
CzestoscRez[b_,ω_]=Sqrt[ω^2-2 b^2]

Narysuj wykres x od t:
- dla b=0.1, ω=8 , F=1 (slabe tlumienie)
- dla b=2, ω=8 , F=1 (silne tlumienie)