

Matematyka 3

Równanie Legendre'a i wielomiany Legendre'a

Zad 1

Rozwiąż równanie

$$(1 - t^2)x'' - 2t x'(t) + n(n+1)x(t) = 0$$

i wypisz oba rozwiązania dla n od 0 do 5 przy pomocy pętli Do

Przykład użycia pętli Do

```
Do[
  Print[Subscript[i, n], "=", n], {n, 0, 5}
]
```

$i_0=0$

$i_1=1$

$i_2=2$

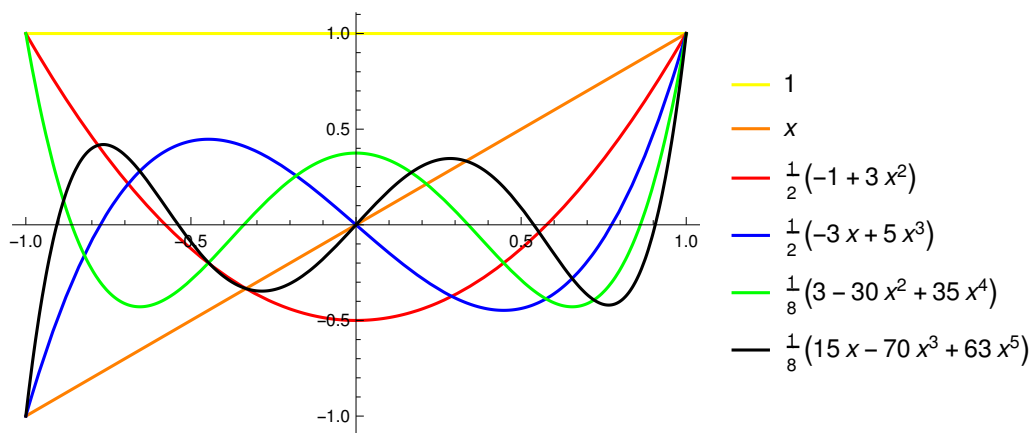
$i_3=3$

$i_4=4$

$i_5=5$

Zad 2

Narysuj wielomiany Legendre'a od $n=0$ do $n=5$



Zad 3

Rozwiązać równanie rekurencyjne przy pomocy RSolve :

$$(n + 1) a_{n+1} = (2n + 1) t a_n - n a_{n-1}$$

Stowarzyszone funkcje Legendre'a

Zad 4

Rozwiązać stowarzyszone równanie Legendre'a

$$(1 - t^2)x''(t) - 2t x'(t) + n(n+1)x(t) - m^2/(1-t^2)x(t) = 0$$

$$n=0,1,2,3\dots$$

$$m=0,1,\dots,n$$

wypisz kilka pierwszych funkcji

LegendreP[n,m,t]

oraz LegendreP[n,m,Cos[z]] , z założeniem $0 < z < \pi$

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w atomie wodoru

Zad 5

zdefiniuj funkcję

$$Y(l,m,\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$

oraz

$$a) R_{21}(r) = \sqrt{\frac{1}{a_0^5} \frac{r e^{-\frac{r}{a_0}}}{2\sqrt{6}}}$$

$$b) R_{31}(r) = \frac{1}{27} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{a_0^5} r e^{-\frac{r}{3a_0}} \left(4 - \frac{2r}{3a_0}\right)}$$

$$c) R_{32}(r) = \frac{2}{81} \sqrt{\frac{2}{15a_0^7}} e^{-\frac{r}{3a_0}} r^2$$

$a_0=1$

narysuj DensityPlot funkcji :

a) $|R_{21}(r) Y(1,0,\theta,\phi)|^2$

b) $|R_{31}(r) Y(1,0,\theta,\phi)|^2$

c) $|R_{32}(r) Y(2,0,\theta,\phi)|^2$

Funkcja DensityPlot3D jest niestety niedostępna w Mathematicie 10.0.0, jest dostępna od wersji 10.2

Przykład:

$R_{10}(r) Y(0,0,\theta,\phi)$ (orbital 1s)

$$R_{10}[r_] = 2 \text{Exp}[-r / a_0] / \text{Sqrt}[a_0]^3$$

$$\frac{2 e^{-\frac{r}{a_0}}}{a_0^{3/2}}$$

(* rysujemy przecięcie wykresu w płaszczyźnie $y=0$

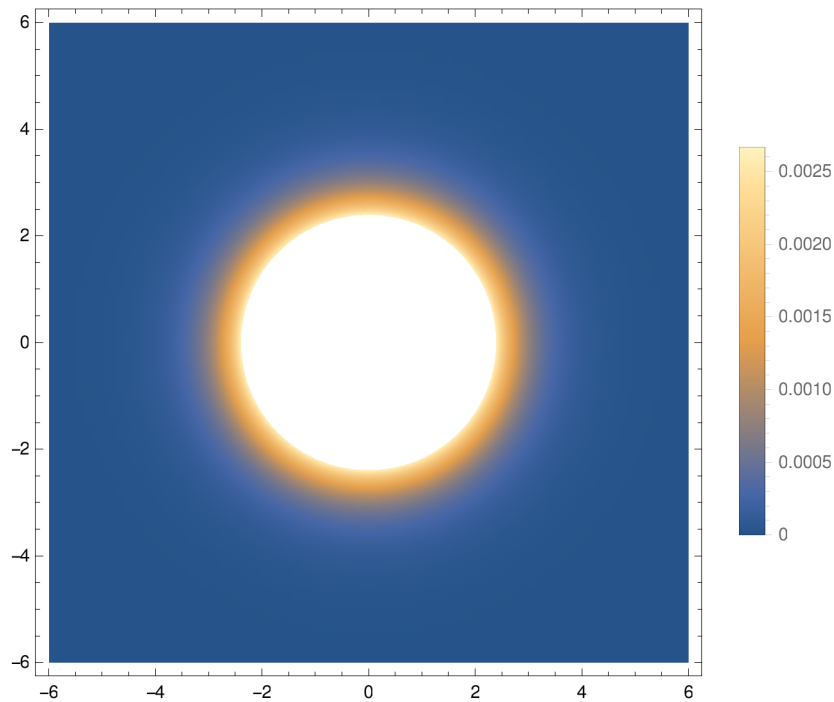
$$r = \text{Sqrt}[x^2 + z^2]$$

$$\phi = 0$$

$$\theta = \text{ArcTan}[x/z]$$

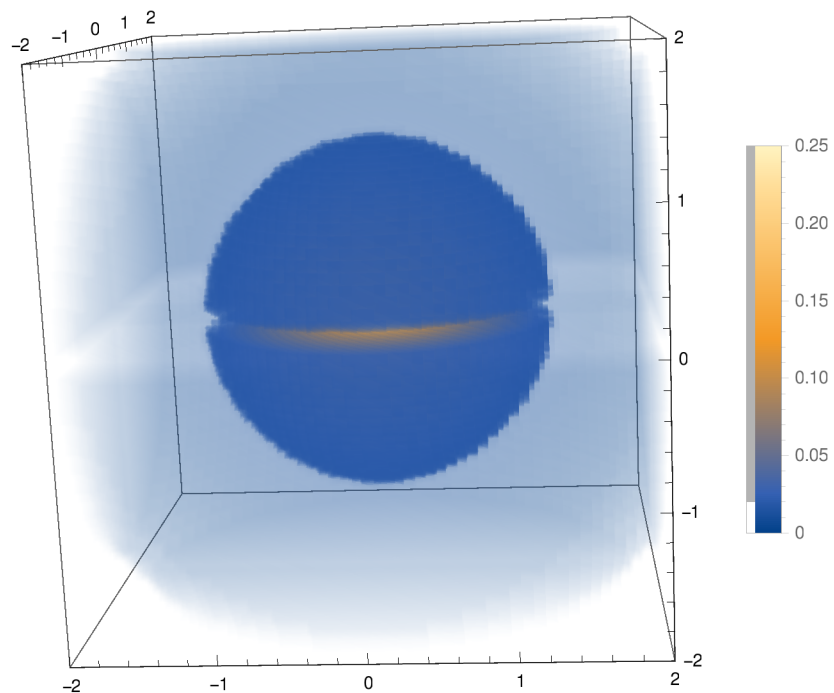
*)

```
DensityPlot[(Abs[R10[Sqrt[x^2 + z^2]] Y[0, 0, ArcTan[x / z], 0]])^2,
  {x, -6 a0, 6 a0}, {z, -6 a0, 6 a0}, PlotLegends -> Automatic, PlotPoints -> 100]
```



(* DensityPlot3D niedostępna w 10.0.0)

```
DensityPlot3D[(Abs[R10[Sqrt[x^2 + y^2 + z^2]] *
  Y[0, 0, ArcTan[Sqrt[x^2 + y^2] / z], ArcTan[x / y]])^2,
  {x, -2 a0, 2 a0}, {y, -2 a0, 2 a0}, {z, -2 a0, 2 a0}, PlotLegends -> Automatic]
```



Zad 6

Wielomiany Legendre'a tworzą bazę ortogonalną funkcji w przedziale $[-1, +1]$.

Znajdź współczynniki f_n rozwinięcia funkcji względem bazy wielomianów Legendre'a

$$f(t) = \sum f_n P_n(t)$$

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(t) f(t) dt$$

a) $f(t) = t^2$

b) $f(t) = \sin(t\pi)$ (3 pierwsze niezerowe współczynniki, zrób wykres funkcji $f(t)$ oraz przybliżenia $f_1 P_1(t) + f_3 P_3(t) + f_5 P_5(t)$)

Przykład:

$$f[t_] = t^3$$

$$t^3$$

$$f[n_] = \text{Integrate}[\text{LegendreP}[n, t] f[t], \{t, -1, 1\}] (2n+1) / 2$$

$$\frac{(2n+1)(n^2+n-8)\sin(\pi n)}{\pi(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}$$

$$\text{Limit}[f[m], m \rightarrow 1]$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\text{Limit}[f[m], m \rightarrow 3]$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\text{Simplify}[\text{Limit}[f[m], m \rightarrow 1] \text{LegendreP}[1, t] + \text{Limit}[f[m], m \rightarrow 3] \text{LegendreP}[3, t]]$$

$$t^3$$

Wielomiany Bessela i Hermite'a

Zad 7

Rozwiązać równanie Bessela i Hermite'a:

$$t^2 x''(t) + t x'(t) + (t^2 - n^2) x(t) = 0$$

$$x''(t) - 2t x'(t) + 2n x(t) = 0$$

Zad 8

Rozwiązać równania rekurencyjne przy pomocy RSolve :

$$t a_{n+1} - 2n a_n + t a_{n-1} = 0$$

$$a_{n+1} - 2t a_n + 2n a_{n-1} = 0$$

Zad 9

Narysuj funkcje BesselJ oraz HermiteH dla n=0-5

Zad 10

Rozważmy 2-wymiarowe rowanie falowe w spolrzednych biegunowych

$$u_{tt}(r, \alpha, t) - c^2 \Delta u(r, \alpha, t) = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

rozwiązanie ma postac

$$u(r, \alpha, t) = T(t) A(\alpha) x(r)$$

Rozwiąz rownania

$$T''(t) = -c^2 m^2 T(t)$$

$$A''(\alpha) = -n^2 A(\alpha)$$

$$r^2 x''(r) + r x'(r) + x(r) (m^2 r^2 - n^2) = 0$$

dla warunkow poczatkowych $x[1]=0, x'[1]=1$ i $A[0]=0, A'[0]=1$

narysuj wykres Plot3D funkcji $A(\alpha) x(r)$ dla parametrow $m=2, n=1$

Zad 11

Rownanie oscylatora harmonicznego ma postac

$$x''(t) - k^2 t^2 x(t) + k(2n+1) x(t) = 0$$

$$(k = \frac{m\omega}{\hbar})$$

Rozwiąż równanie i narysuj pierwsze z rozwiązań dla $n=0-4$ i $k=1$.

Zad 12

Znając funkcje tworzące wielomianów Hermite'a i Legendre'a wyznacz kilka pierwszych wielomianów H_n i P_n

$$G(t, \lambda) = e^{2\lambda t - \lambda^2}$$

$$G_2(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda t + 1}}$$