

Szereg Fouriera-Legendre'a

Szereg Fouriera-Legendre'a : $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) f_n$

Współczynniki $f_n = \frac{\int_{-1}^1 P_n(t) f(t) dt}{\int_{-1}^1 P_n(t)^2 dt} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(t) f(t) dt$

$$\int_{-1}^1 P_n(t)^2 dt = \frac{2}{2n+1}$$

Zadanie 1

Policz kwadrat normy funkcji Legendre'a (LegendreP[n,t])

$$\int_{-1}^1 P_n(t)^2 dt$$

dla n=0, 1, 2, 3

Funkcja zwracająca współczynniki Fouriera-Legendre

Zdefiniujmy funkcję zwracającą współczynniki Fouriera-Legendre'a $f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(t) f(t) dt$:

`FourierLegendre[f_, t_, n_] := (2 n + 1) / 2 Integrate[LegendreP[n, t] * f, {t, -1, 1}]`

Przykład

Exp[-t]

`f[t_] = Exp[-t]`

e^{-t}

Lista 4 pierwszych współczynników Fouriera-Legendre'a:

```
fn = Table[FourierLegendre[f[t], t, n], {n, 0, 3}]
```

$$\left\{ \sinh(1), -\frac{3}{e}, \frac{5}{2} \left(e - \frac{7}{e} \right), \frac{7}{2} \left(5e - \frac{37}{e} \right) \right\}$$

Lista 4 pierwszych funkcji Legendre'a:

```
L = Table[LegendreP[n, t], {n, 0, 3}]
```

$$\left\{ 1, t, \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \right\}$$

Suma częściowa szeregu do $n=3$ $\sum_{n=0}^3 P_n(t) f_n$ wynosi:

```
fn.L
```

$$\frac{7}{4} \left(5e - \frac{37}{e} \right) (5t^3 - 3t) + \frac{5}{4} \left(e - \frac{7}{e} \right) (3t^2 - 1) - \frac{3t}{e} + \sinh(1)$$

Funkcja zwracająca sumę częściową szeregu

$$\sum_{n=0}^k P_n(t) f_n \text{ od } k=0 \text{ do } k=K$$

```
WypiszSumyCzesciowe[funkcja_, K_] :=
Module[{Wynik, SumaCzesciowa, L, fn}, (* zmienne lokalne *)

fn = Table[FourierLegendre[funkcja, t, n], {n, 0, K}];
(* Lista K+1 pierwszych wsp ̄czynnik w Fouriera-Legendre'a *)

L = Table[LegendreP[n, t], {n, 0, K}];
(* Lista K+1 pierwszych funkcji Legendre'a *)

Wynik = {}; (* pusta lista *)
Do[SumaCzesciowa = (Take[L, n]).(Take[fn, n]);
Wynik = Append[Wynik, SumaCzesciowa], {n, 1, Length[L]}];
(* Tworzy sumy czesciowe i dodaje je do wyniku *)
Wynik
]
```

Moduł

? Module

Module[{x, y, ...}, expr] specifies that occurrences of the symbols x, y, ... in expr should be treated as local.

Module[{x = x0, ...}, expr] defines initial values for x, ... >>

Take

Take[lista,n] zwraca pierwszych n elementów listy

? Take

Take[list , n] gives the first n elements of *list* .

Take[list , -n] gives the last n elements of *list* .

Take[list , {m , n}] gives elements m through n of *list* .

Take[list , seq₁ , seq₂ , ...] gives a nested list in which elements specified by *seq_i* are taken at level i in *list* . >>

Append

Append[lista, elem] zwraca listę powiększoną o element elem

? Append

Append[expr , elem] gives *expr* with *elem* appended.

Append[elem] represents an operator form of Append that can be applied to an expression. >>

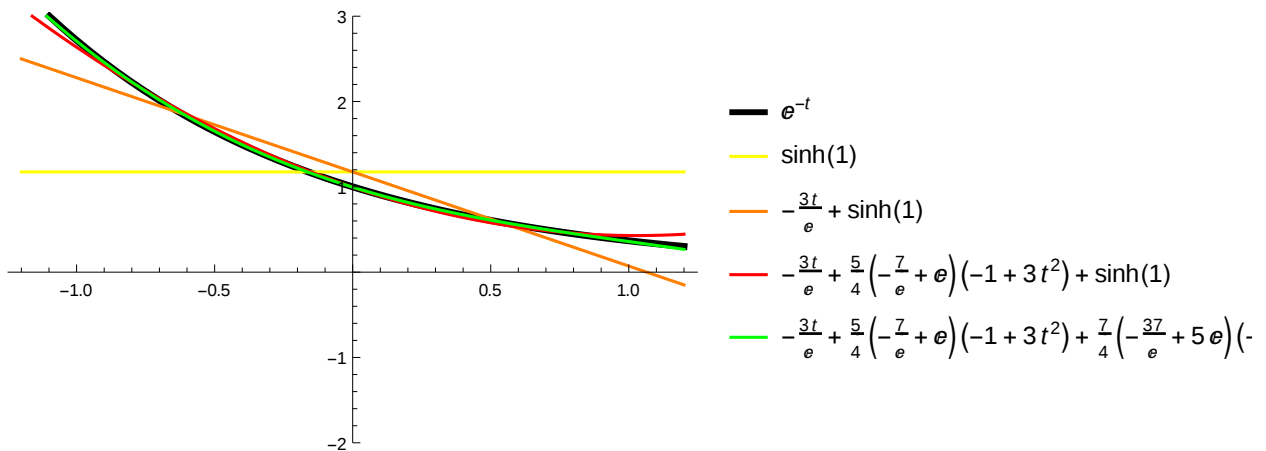
Przykład

Wykres przedstawiający funkcję f oraz sumy czesciowej jej rozwinięcia w szereg Fouriera-Legendre'a $n=0,1,2,3$

WypiszSumyCzesciowe[f[t], 3]

$$\left\{ \sinh(1), \sinh(1) - \frac{3t}{e}, \frac{5}{4} \left(e - \frac{7}{e} \right) (3t^2 - 1) - \frac{3t}{e} + \sinh(1), \right. \\ \left. \frac{7}{4} \left(5e - \frac{37}{e} \right) (5t^3 - 3t) + \frac{5}{4} \left(e - \frac{7}{e} \right) (3t^2 - 1) - \frac{3t}{e} + \sinh(1) \right\}$$

```
Plot[Evaluate[{f[t], WypiszSumyCzesciowe[f[t], 3]}], {t, -1.2, 1.2},
PlotRange -> {-2, 3},
PlotStyle -> {{Thickness[.01], Black}, Yellow, Orange, Red, Green},
PlotLegends -> "Expressions"]
```



Zadanie2

Narysuj wykres przedstawiający funkcję f oraz sumy czesciowej jej rozwinięcia w szereg Fouriera-Legendre'a $n=0,1,2,3,4,5$ dla

a) $f(t) = \sinh(t+|t|)$

b) $f(t) = \Pi(t - 0.25)$ (funkcja HeavisidePi)

Zadanie3

Utworz funkcję

WypiszSumyCzescioweParzyste[funkcja_,K_]

ktora bedzie tworzy sumy parzystych wyrazów szeregu Fouriera-Legendre'a

($\{f_0 P_0, f_0 P_0 + f_2 P_2, f_0 P_0 + f_2 P_2 + f_4 P_4, \dots\}$)

Narysuj wykresy przedstawiające funkcję f oraz sumy czesciowe jej rozwinięcia w szereg Fouriera-Legendre'a

a) $\cos(\pi t)$

b) $\exp(-|t|)$

Trygonometryczny Szereg Fouriera

`FourierTrigSeries[expr, t, n]`

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k t) + b_k \sin(k t)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(k t) dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(k t) dt$$

FourierTrigSeries

Wypisuje rozwinięcie funkcji w szereg Fouriera do n-tego wyrazu

? `FourierTrigSeries`

`FourierTrigSeries[expr, t, n]` gives the n^{th} -order Fourier trigonometric series expansion of *expr* in *t*.

`FourierTrigSeries[expr, {t1, t2, ...}, {n1, n2, ...}]` gives the multidimensional Fourier trigonometric series of *expr*. >>

Przykład

$$f(t) = t + t^2$$

$$t \in (-\pi, \pi)$$

$$fa[t_] = t + t^2$$

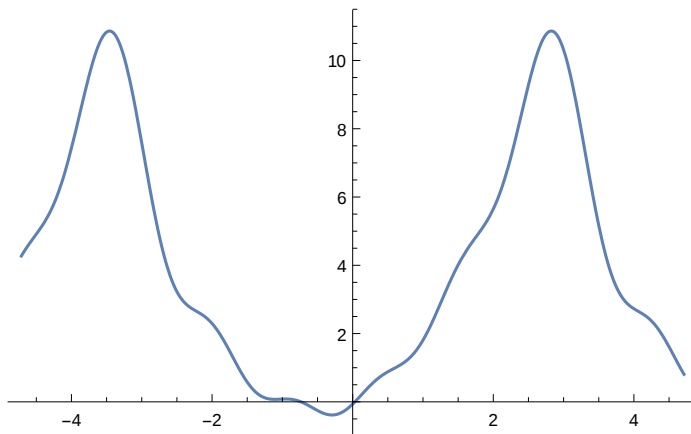
$$t^2 + t$$

`FourierTrigSeries[fa[t], t, 5]`

$$-2 \left(-\sin(t) + \frac{1}{2} \sin(2t) - \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{4} \sin(4t) - \frac{1}{5} \sin(5t) \right) +$$

$$4 \left(-\cos(t) + \frac{1}{4} \cos(2t) - \frac{1}{9} \cos(3t) + \frac{1}{16} \cos(4t) - \frac{1}{25} \cos(5t) \right) + \frac{\pi^2}{3}$$

```
Plot[Evaluate[FourierTrigSeries[fa[t], t, 5]], {t, -1.5 Pi, 1.5 Pi}]
```



FourierParameters

FourierParameters → {a,b}

domyslnie jest {1,1}

$$\left| \frac{b}{\pi} \right|^{\frac{1-a}{2}} (a_0/2 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(b k t) + b_k \sin(b k t))$$

$$a_k = \left| \frac{b}{\pi} \right|^{\frac{a+1}{2}} \int_{-\pi/|b|}^{\pi/|b|} f(t) \cos(b k t) dt$$

$$b_k = \left| \frac{b}{\pi} \right|^{\frac{1+a}{2}} \int_{-\pi/|b|}^{\pi/|b|} f(t) \sin(b k t) dt.$$

Zmiana granic przedziału

$$f(t) = t + t^2$$

$$t \in (-1,1)$$

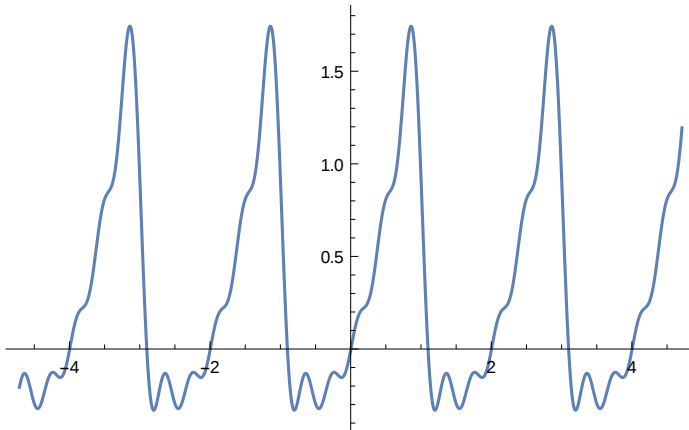
FourierParameters → {1, Pi}

```
FourierTrigSeries[fa[t], t, 5, FourierParameters → {1, Pi}]
```

$$\frac{2 \sin(\pi t)}{\pi} - \frac{\sin(2 \pi t)}{\pi} + \frac{2 \sin(3 \pi t)}{3 \pi} - \frac{\sin(4 \pi t)}{2 \pi} + \frac{2 \sin(5 \pi t)}{5 \pi} -$$

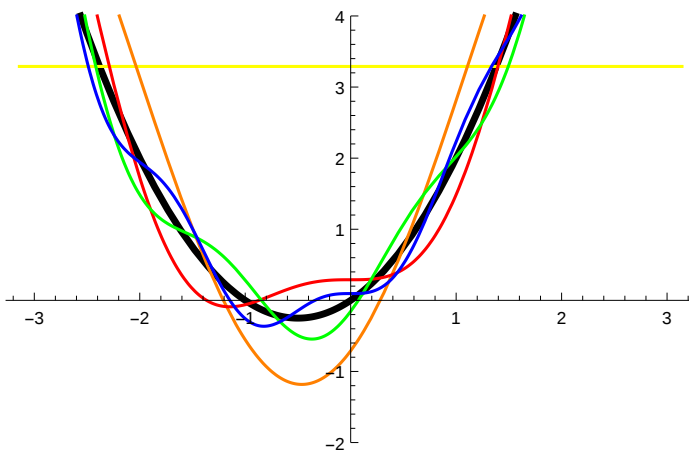
$$\frac{4 \cos(\pi t)}{\pi^2} + \frac{\cos(2 \pi t)}{\pi^2} - \frac{4 \cos(3 \pi t)}{9 \pi^2} + \frac{\cos(4 \pi t)}{4 \pi^2} - \frac{4 \cos(5 \pi t)}{25 \pi^2} + \frac{1}{3}$$

```
Plot[Evaluate[FourierTrigSeries[fa[t], t, 5, FourierParameters -> {1, Pi}]],
{t, -1.5 Pi, 1.5 Pi}]
```



```
WypiszSumyCzescioweTrig[funkcja_, K_, T_] := (* dla przedziału (-T,T) *)
Module[{Wynik},
Wynik = {};
Do[Wynik = Append[Wynik,
FourierTrigSeries[funkcja, t, n, FourierParameters -> {1, Pi / T}]], {n, 0, K}];
Wynik
]
```

```
Plot[Evaluate[{fa[t], WypiszSumyCzescioweTrig[fa[t], 4, Pi]}],
{t, -Pi, Pi}, PlotRange -> {-2, 4},
PlotStyle -> {{Thickness[.01], Black}, Yellow, Orange, Red, Green, Blue},
PlotLegends -> "Expressions"]
```



— $t + t^2$
— $\frac{\pi^2}{3}$
— $\frac{\pi^2}{3} - 4 \cos(t) + 2 \sin(t)$
— $\frac{\pi^2}{3} + 4 \left(-\cos(t) + \frac{1}{4} \cos(2t) \right) - 2 \left(-\sin(t) + \frac{1}{2} \right)$
— $\frac{\pi^2}{3} + 4 \left(-\cos(t) + \frac{1}{4} \cos(2t) - \frac{1}{9} \cos(3t) \right) - 2$
— $\frac{\pi^2}{3} + 4 \left(-\cos(t) + \frac{1}{4} \cos(2t) - \frac{1}{9} \cos(3t) + \frac{1}{16} \right)$

Zadanie4

Narysuj wykres przedstawiający funkcję f oraz sumy czesciowej jej rozwinięcia szeregiem Fouriera $n=0,1,2,3,4$ dla

a) $f(t) = \exp(-|t|)$ dla przedziału $(-\pi, \pi)$

b) $f(t) = \sin(1-|t|)$ dla przedziału $(-1, 1)$

c) $f(t) = \Pi(5*t)$ dla przedziału $(-1, 1)$

EksponecjalnSzeregFouriera

FourierSeries[expr, t, n]

$$\sum_{k=-n}^n f_k \exp(k t)$$

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(k t) dt$$

? FourierSeries

FourierSeries[expr, t, n] gives the n^{th} -order Fourier series expansion of expr in t.

FourierSeries[expr, {t1, t2, ...}, {n1, n2, ...}] gives the multidimensional Fourier series. >>

Przykład

F[t_] = t^2

t^2

FourierSeries[F[t], t, 5]

$$-2 e^{-i t} - 2 e^{i t} + \frac{1}{2} e^{-2 i t} + \frac{1}{2} e^{2 i t} - \frac{2}{9} e^{-3 i t} - \frac{2}{9} e^{3 i t} + \frac{1}{8} e^{-4 i t} + \frac{1}{8} e^{4 i t} - \frac{2}{25} e^{-5 i t} - \frac{2}{25} e^{5 i t} + \frac{\pi^2}{3}$$

TransformacjaFouriera

FourierTransform[expr, t, z]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{izt} dt$$

InverseFourierTransform[expr, z, t]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-izt} dz$$

Przykład

FourierTransform[F[t], t, z]

$$-\sqrt{2\pi} \delta''(z)$$

InverseFourierTransform[%, z, t]

$$\sqrt{2\pi} \delta(t)$$

Zadanie5

Policz transformacje Fouriera funkcji

- a) $\exp(-|t|)$
- b) $\exp(-t^2)$
- c) $\Pi(t)$
- d) $\delta(t)$
- e) 1
- f) x^5
- g) $\frac{1}{\sqrt{|t|}}$
- h) $\text{sign}(t)$
- i) $\sin(t)$
- j) $\sin(t^2)$
- k) $\frac{1}{t}$
- k) $f''(t)$

Zadanie6

Aby rozwiązać równanie

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) = 0 \text{ z warunkiem początkowym } f(x, 0) = \delta(x)$$

rozwiąż równanie będące jego transformacją Fouriera:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(k, t) + k^2 u(k, t) = 0$$

$$\text{gdzie } u(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{ikx} dx$$

(znajdź warunek początkowy $u(k, 0)$ dla funkcji $u(k, t)$)

Policz odwrotną transformację Fouriera rozwiązania.

Narysuj Plot3D rozwiązania dla $\{x, -10, 10\}$ oraz $\{t, 0, 10\}$