Ortogonalizacja

Procedura ortogonalizacji ukladu funkcji $\{f_1, \ ..., f_N\}$ wygląda następująco:

$g_1 = f_1(t)$

$h_1 = g_1 \Big/ \sqrt{\left(\int_a^b (g_1(t))^2 \, dt\right)}$

$g_2 = f_2(t) - h_1(t) \int_a^b h_1(t) \, f_2(t) \, dt$

$h_2 = g_2 \Big/ \sqrt{\left(\int_a^b (g_2(t))^2 \, dt\right)}$

.

.

.

$g_n = f_n(t) - \sum_{i=1}^{n-1} h_i(t) \int_a^b h_i(t) \, f_n(t) \, dt$

$h_n = g_n \Big/ \sqrt{\left(\int_a^b (g_n(t))^2 \, dt\right)}$

.

.

itd aż do n = N

otrzymujemy układ funkcji $\{h_1, \ ..., h_N\}$ ktore są ortogonalne i znormalizowane na odcinku [a,b] (ortonormalne).

```
L = {1, t, t^2, t^3, t^4}
```

$\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$

Przykład

2 pierwsze funkcje ortonormalne mają postac:

```
g1 = L[[1]];
h1 = g1 / Sqrt[ Integrate[g1^2, {t, -1, 1}]]
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

```
g2 = L[[2]] - h1 * Integrate[h1 * L[[2]], {t, -1, 1}];
h2 = g2 / Sqrt[ Integrate[g2^2, {t, -1, 1}]]
```

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \, t$$

Zadanie1

Napisz funkcję Ortogonalizuj[Lista_], która pobiera liste funkcji i zwraca listę ortonormalnych funkcji na odcinku [-1,1]
Użyj Module[]
Inne przydatne funkcje:

Sum[expr,{i,1,k}]
Append[Lista,element]   (dodaje element do listy)
Do[expr,{i,1,k}]
Length[Lista] (długośc listy)

Zadziałaj funkcją na listę {1,t,t^2,t^3,t^4}

Zadanie2

Zmodyfikuj funkcję z poprzedniego zadania tak, aby zwracala listę ortogonalnych funkcji na odcinku [-1,1] i mających wartośc 1 w punkcie t=1.

Zadziałaj funkcją na listę {1,t,t^2,t^3,t^4}

Zadanie3

Napisz funkcję OrtogonalizujH[Lista_], która pobiera liste funkcji i zwraca listę ortonormalnych funkcji na odcinku [-∞,∞] z wagą $\exp(-t^2)$, tzn:

$g_n=f_n(t)- \sum_{i=1}^{n-1} h_i(t) \int_{\infty}^{-\infty} h_i(t)\, f_n(t) \exp(-t^2)\, dt$
$h_n=g_n \Big/ \sqrt{\left(\int_{\infty}^{-\infty} (g_n(t))^2 \exp(-t^2)\, dt\right)}$

Zadziałaj funkcją na listę {1,t,t^2,t^3,t^4}

Zadanie4

Zmodyfikuj funkcję z poprzedniego zadania tak, aby zwracala listę ortogonalnych funkcji na odcinku

[-∞,∞] z wagą $\exp(-t^2)$ ale z normą równą

$\left(\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)^2 \exp(-t^2)\, dt\right)^{1/2} = \pi^{1/4}\ \sqrt{\left(2^{n-1}(n-1)!\right)}$
n=1,2,3,..

Zadziałaj funkcją na listę {1,t,t^2,t^3,t^4}