Wstęp do algebry
Zajęcia nr 1

Rozwiązywanie równań

Równania w mathematice zapisujemy przy uzyciu znaku ==

Np. równanie kwadratowe:
x^2 - 2 x- 5 == 0

Chcemy znaleźć zbiór x spełniających to równanie.

```
? Solve
```

Solve[*expr*, *vars*] attempts to solve the system *expr* of equations or inequalities for the variables *vars*.
Solve[*expr*, *vars*, *dom*] solves over the domain
dom. Common choices of *dom* are Reals, Integers, and Complexes. >>

```
Solve[x^2 - 2 x - 5 == 0, x]
```

$\left\{\left\{x \to 1 - \sqrt{6}\right\}, \left\{x \to 1 + \sqrt{6}\right\}\right\}$

Rozwiązanie w postaci liczby zmiennoprzecinkowej:

```
N[%]
```

{{x → -1.44949}, {x → 3.44949}}

```
NSolve[x^2 - 2 x - 5 == 0, x]
```

{{x → -1.44949}, {x → 3.44949}}

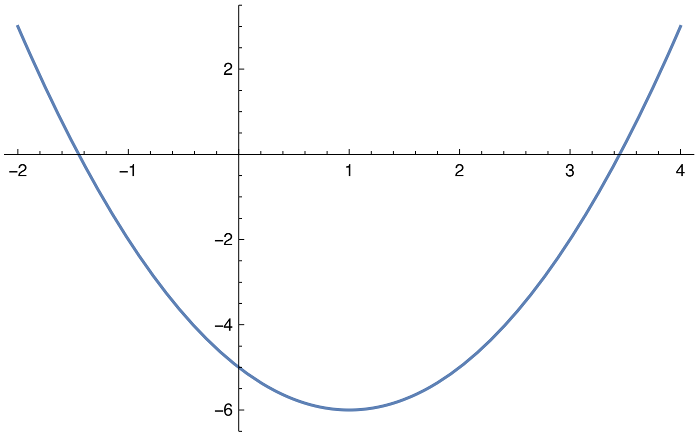
Rozwiązanie graficzne

```
? Plot
```

Plot[f, {x, x_{min}, x_{max}}] generates a plot of f as a function of x from x_{min} to x_{max}.
Plot[{f_1, f_2, ...}, {x, x_{min}, x_{max}}] plots several functions f_i.
Plot[..., {x} ∈ *reg*] takes the variable x to be in the geometric region *reg*. >>

Rozwiazania to miejsca przeciecia z osia Ox :

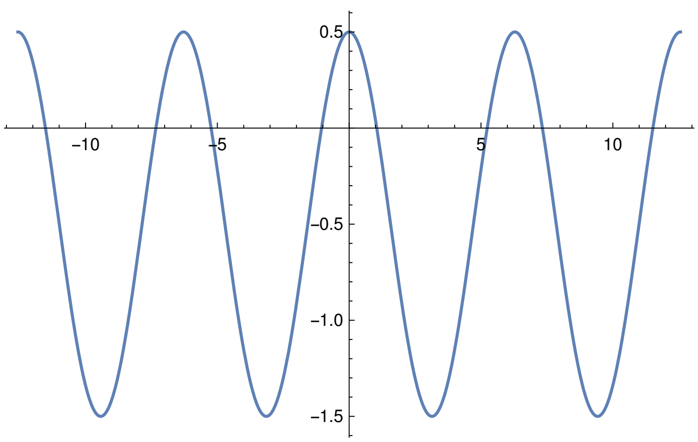
In[1]:= `Plot[x^2 - 2 x - 5, {x, -2, 4}]`

Out[1]= 

In[3]:= `Solve[Cos[x] == 1 / 2, x]`

Out[3]= $\left\{\left\{x \to \text{ConditionalExpression}\left[-\frac{\pi}{3} + 2\,\pi\,C[1],\ C[1] \in \text{Integers}\right]\right\}, \left\{x \to \text{ConditionalExpression}\left[\frac{\pi}{3} + 2\,\pi\,C[1],\ C[1] \in \text{Integers}\right]\right\}\right\}$

In[4]:= `Plot[Cos[x] - 1 / 2, {x, -4 Pi, 4 Pi}]`

Out[4]= 

Układ równań

Jedna zmienna:

x^2 - 1 = 0
x^2 - 3 x + 2 = 0

```
Solve[{x^2 - 1 == 0, x^2 - 3 x + 2 == 0}, x]
{{x → 1}}
```

Dwie zmienne

x-y = 0
x^2+y^2 = 1

```
Solve[{x - y == 0, x^2 + y^2 == 2}, {x, y}]
{{x → -1, y → -1}, {x → 1, y → 1}}
```

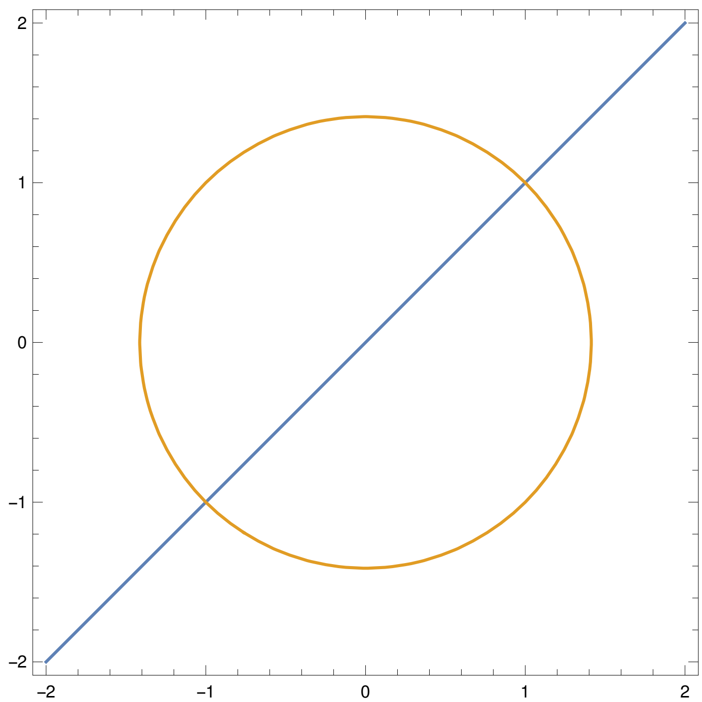
Rozwiązanie graficzne ukladu równań 2 zmiennych - ContourPlot

```
? ContourPlot
```

ContourPlot[f, {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}] generates a contour plot of f as a function of x and y.
ContourPlot[f == g, {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}] plots contour lines for which $f = g$.
ContourPlot[{f_1 == g_1, f_2 == g_2, …}, {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}] plots several contour lines.
ContourPlot[…, {x, y} ∈ reg] takes the variables {x, y} to be in the geometric region reg. >>

Rozwiazania to punkty przecięcia krzywych

```
ContourPlot[{x - y == 0, x^2 + y^2 == 2}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



Reduce

Wynik jest wyrażeniem logicznym

```
? Reduce
```

Reduce[*expr*, *vars*] reduces the statement *expr* by solving equations or inequalities for *vars* and eliminating quantifiers.
Reduce[*expr*, *vars*, *dom*] does the reduction over the domain *dom*. Common choices of *dom* are Reals, Integers, and Complexes. »

```
Reduce[x^3 - 3 x == 0, x]
```

$x == 0 \,||\, x == -\sqrt{3} \,||\, x == \sqrt{3}$

```
Reduce[{x - y == 0, x^2 + y^2 == 2}, {x, y}]
```

(x == -1 || x == 1) && y == x

FindRoot

Znajduje numerycznie rozwiązanie równania leżące najbliżej podanego punktu x_0

```
? FindRoot
```

FindRoot[f, {x, x_0}] searches for a numerical root of f, starting from the point $x = x_0$.
FindRoot[$lhs == rhs$, {x, x_0}] searches for a numerical solution to the equation $lhs == rhs$.
FindRoot[{f_1, f_2, …}, {{x, x_0}, {y, y_0}, …}] searches for a simultaneous numerical root of all the f_i.
FindRoot[{eqn_1, eqn_2, …}, {{x, x_0}, {y, y_0}, …}]
searches for a numerical solution to the simultaneous equations eqn_i. ≫

```
Solve[3 Cos[x] == Log[x], x]
```

Solve::nsmet : This system cannot be solved with the methods available to Solve. ≫

```
Solve[3 Cos[x] == Log[x], x]
```

```
FindRoot[3 Cos[x] == Log[x], {x, 1}]
```

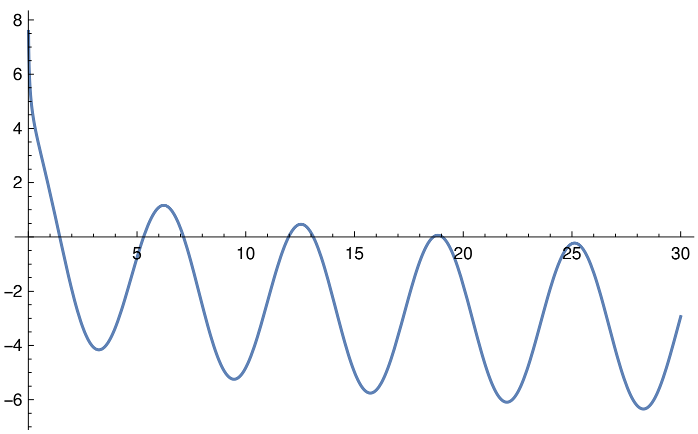
```
{x → 1.44726}
```

```
FindRoot[3 Cos[x] == Log[x], {x, 6}]
```

```
{x → 5.30199}
```

In[5]:=
```
Plot[3 Cos[x] - Log[x], {x, 0, 30}]
```

Out[5]=



Równania liniowe

Zadanie

Rozwiązać układy równanań liniowych 2 zmiennych:

a)
2x+y=4
x-y=2

b)
x-y=1
-2x+2y=5

1) Przy pomocy Solve lub Reduce

2) Graficznie przy pomocy ContourPlot

Wektory i macierze

Wektory

{x,y,z}   wektor o współrzędnych x,y,z

```
v = {x, y, z}
```

```
{x, y, z}
```

Działania na wektorach:

```
p v + q
```

```
{q + p x, q + p y, q + p z}
```

Iloczyn skalarny

```
{x, y}.{s, t}
```

$s x + t y$

Norma

```
Norm[v]
```

$\sqrt{\text{Abs}[x]^2 + \text{Abs}[y]^2 + \text{Abs}[z]^2}$

Współrzedne wektora

```
v[[1]]
```

x

```
v[[2]]
```

y

```
v[[3]]
```

z

```
MatrixForm[v]
```

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Macierze

```
M = {{A1, B1,  C1}, {A2, B2, C2}, {A3, B3, C3}}
```

{{A1, B1, C1}, {A2, B2, C2}, {A3, B3, C3}}

```
MatrixForm[M]
```

$$\begin{pmatrix} A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \\ A3 & B3 & C3 \end{pmatrix}$$

pierwszy wiersz macierzy

```
M[[1]]
```

{A1, B1, C1}

Pierwszy wiersz, druga kolumna

```
M[[1, 2]]
```

B1

Transpozycja

```
Transpose[M]
```

{{A1, A2, A3}, {B1, B2, B3}, {C1, C2, C3}}

```
MatrixForm[Transpose[M]]
```

$$\begin{pmatrix} A1 & A2 & A3 \\ B1 & B2 & B3 \\ C1 & C2 & C3 \end{pmatrix}$$

```
S = {{1, 2}, {4, 3}}
```

{{1, 2}, {4, 3}}

Wyznacznik macierzy

```
Det[S]
```

-5

Rząd macierzy

```
MatrixRank[S]
```

2

Działanie macierzy na wektor

```
M.v
```

{A1 x + B1 y + C1 z, A2 x + B2 y + C2 z, A3 x + B3 y + C3 z}

Macierz układu równań

Układ równań liniowych jednorodnych:

5x+5y-z=0
10x+5y+2z=0
5x+15y-9z=0

Macierz układu równań a
a.v=0

```
a = {{5, 5, -1}, {10, 5, 2}, {5, 15, -9}}
```

{{5, 5, -1}, {10, 5, 2}, {5, 15, -9}}

```
a // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 10 & 5 & 2 \\ 5 & 15 & -9 \end{pmatrix}$$

```
a.v == {0, 0, 0}
```

{5 x + 5 y - z, 10 x + 5 y + 2 z, 5 x + 15 y - 9 z} == {0, 0, 0}

Thread - tworzy liste rownań

```
Thread[a.v == {0, 0, 0}]
```

{5 x + 5 y - z == 0, 10 x + 5 y + 2 z == 0, 5 x + 15 y - 9 z == 0}

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 5x+5y-z==0 \\ 10x+5y+2z==0 \\ 5x+15y-9z==0 \end{pmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Wykonujemy operacje elementarne na wierszach macierzy, aby otrzymac macierz górnotrójkątną

Dzielimy wiersze przez współczynniki x-ów

```
a[[1]] = a[[1]] / a[[1, 1]]
a[[2]] = a[[2]] / a[[2, 1]]
a[[3]] = a[[3]] / a[[3, 1]]
```

$\left\{1, 1, -\frac{1}{5}\right\}$

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right\}$

$\left\{1, 3, -\frac{9}{5}\right\}$

Otrzymujemy jedynki w pierwszej kolumnie

```
a // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 1 & 3 & -\frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

Odejmujemy od 2. i 3. wiersza wiersz 1.

```
a[[2]] = a[[2]] - a[[1]]
a[[3]] = a[[3]] - a[[1]]
```

$$\left\{0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right\}$$

$$\left\{0, 2, -\frac{8}{5}\right\}$$

```
a  // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ 0 & 2 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Dzielimy wiersze przez współczynniki y-ów

```
a[[2]] = a[[2]] / a[[2, 2]]
a[[3]] = a[[3]] / a[[3, 2]]
```

$$\left\{0, 1, -\frac{4}{5}\right\}$$

$$\left\{0, 1, -\frac{4}{5}\right\}$$

```
a // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Odejmujemy od 3. wiersza wiersz 2.

```
a[[3]] = a[[3]] - a[[2]]
```

$\{0, 0, 0\}$

Otrzymaliśmy macierz górnotrójkątną

```
a // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odejmujemy jeszcze od 1. wiersza wiersz 2. aby x i y były wyrażone przez z

```
a[[1]] = a[[1]] - a[[2]]
```

$\left\{1,\ 0,\ \frac{3}{5}\right\}$

```
a // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Thread[a.v == {0, 0, 0}]
```

$\left\{x + \frac{3\,z}{5} == 0,\ y - \frac{4\,z}{5} == 0,\ \text{True}\right\}$

Rozwiązanie: $x = -\frac{3\,z}{5},\ y = \frac{4\,z}{5}$

```
Solve[{5 x + 5 y - z == 0, 10 x + 5 y + 2 z == 0, 5 x + 15 y - 9 z == 0}, {x, y}]
```

$\left\{\left\{x \to -\frac{3\,z}{5},\ y \to \frac{4\,z}{5}\right\}\right\}$

Zadanie

Rozwiązać układ równań

2x+y=0

4x+y-z=0

8x+y-3z=0

a) Przy użyciu funkcji Solve lub Reduce

b) Metodą eliminacji Gaussa