Wstęp do algebry
Zajęcia nr 2

Układ równań liniowych niejednorodnych

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

Poddajemy macierz rozszerzoną układu równań przekształceniom elementarnym, aby otrzymac postac zredukowaną

3 x + 2 y + z = 11
2 x + 3 y + z = 13
x + y + 4 z = 12

a.v==b

```
a = {{3, 2, 1}, {2, 3, 1}, {1, 1, 4}}
a // MatrixForm
```

{{3, 2, 1}, {2, 3, 1}, {1, 1, 4}}

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
b = {11, 13, 12}
```

{11, 13, 12}

```
v = {x, y, z}
```

{x, y, z}

```
Thread[a.v == b]
```

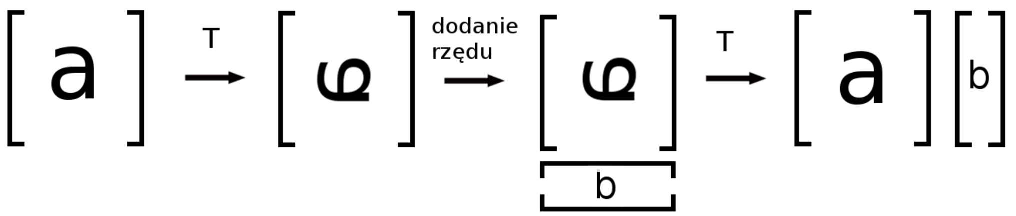
```
{3 x + 2 y + z == 11, 2 x + 3 y + z == 13, x + y + 4 z == 12}
```

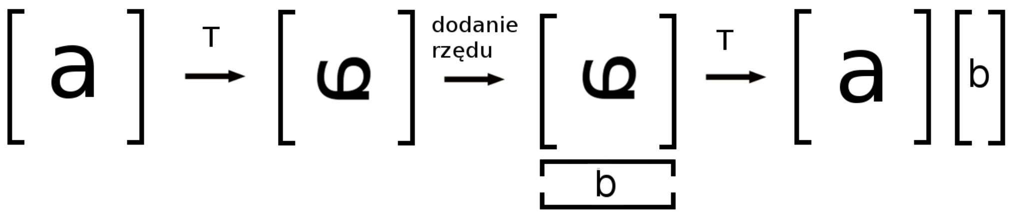
Stwórzymy macierz rozszerzoną - dodamy do macierzy a kolumnę b.

Dodanie wiersza do macierzy - funkcja Append[]

```
? Append
```

Append[*expr*, *elem*] gives *expr* with *elem* appended.
Append[*elem*] represents an operator form of Append that can be applied to an expression. >>






```
A = Transpose[Append[Transpose[a], b]]
```

```
{{3, 2, 1, 11}, {2, 3, 1, 13}, {1, 1, 4, 12}}
```

```
A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

```
MatrixRank[a]
```

```
3
```

```
MatrixRank[A]
```

3

```
A[[1]] = A[[1]] / A[[1, 1]]
A[[2]] = A[[2]] / A[[2, 1]]
A[[3]] = A[[3]] / A[[3, 1]]
```

$\left\{1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right\}$

$\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right\}$

$\{1, 1, 4, 12\}$

```
A[[2]] = A[[2]] - A[[1]]
A[[3]] = A[[3]] - A[[1]]
```

$\left\{0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right\}$

$\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{11}{3}, \frac{25}{3}\right\}$

```
A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{17}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & \frac{25}{3} \end{pmatrix}$$

```
A[[1]] = A[[1]] / A[[1, 2]]
A[[2]] = A[[2]] / A[[2, 2]]
A[[3]] = A[[3]] / A[[3, 2]]
```

$\left\{\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right\}$

$\left\{0, 1, \frac{1}{5}, \frac{17}{5}\right\}$

$\{0, 1, 11, 25\}$

```
A[[1]] = A[[1]] - A[[2]]
A[[3]] = A[[3]] - A[[2]]
```

$\left\{\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{10}, \frac{21}{10}\right\}$

$\left\{0, 0, \frac{54}{5}, \frac{108}{5}\right\}$

```
A  // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{21}{10} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & \frac{54}{5} & \frac{108}{5} \end{pmatrix}$$

```
A[[1]] = A[[1]] / A[[1, 3]]
A[[2]] = A[[2]] / A[[2, 3]]
A[[3]] = A[[3]] / A[[3, 3]]
```

{5, 0, 1, 7}

{0, 5, 1, 17}

{0, 0, 1, 2}

```
A[[1]] = A[[1]] - A[[3]]
A[[2]] = A[[2]] - A[[3]]
```

{5, 0, 0, 5}

{0, 5, 0, 15}

```
A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
A[[1]] = A[[1]] / A[[1, 1]]
A[[2]] = A[[2]] / A[[2, 2]]
```

{1, 0, 0, 1}

{0, 1, 0, 3}

```
A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
A = Transpose[Append[Transpose[a], b]]
```

{{3, 2, 1, 11}, {2, 3, 1, 13}, {1, 1, 4, 12}}

```
RowReduce[A] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
? RowReduce
```

RowReduce[m] gives the row- reduced form of the matrix m. >>

Rozwiązanie:
x=1
y=3
z=2

```
rownania = Thread[a.{x, y, z} == b]
```

```
{3 x + 2 y + z == 11, 2 x + 3 y + z == 13, x + y + 4 z == 12}
```

```
Solve[rownania, {x, y, z}]
```

```
{{x → 1, y → 3, z → 2}}
```

LinearSolve[a,b] - daje rozwiązanie ukladu a.v=b

```
LinearSolve[a, b]
```

```
{1, 3, 2}
```

```
? LinearSolve
```

LinearSolve[m, b] finds an x that solves the matrix equation $m.x == b$.
LinearSolve[m] generates a LinearSolveFunction[...] that can be applied repeatedly to different b. >>

Zadanie

Wygenerować macierz a o 3 wierszach i 4 kolumnach oraz wektor b o 3 współrzędnych
Niech elementy Mathematicacierzy i współrzedne wektora to liczby całkowite z przedziału 1-25:

```
a = Table[RandomInteger[{1, 25}], {i, 1, 3}, {j, 1, 4}]
```

```
b = Table[RandomInteger[{1, 25}], {i, 1, 3}]
```

? Table

Table[$expr$, {i_{max} }] generates a list of i_{max} copies of $expr$.
Table[$expr$, {i, i_{max} }] generates a list of the values of $expr$ when i runs from 1 to i_{max} .
Table[$expr$, {i, i_{min} , i_{max} }] starts with $i = i_{min}$.
Table[$expr$, {i, i_{min} , i_{max} , di }] uses steps di .
Table[$expr$, {i, {i_1, i_2, …}}] uses the successive values i_1, i_2, ….
Table[$expr$, {i, i_{min} , i_{max} }, {j, j_{min} , j_{max} }, …] gives a nested list. The list associated with i is outermost. »

? RandomInteger

RandomInteger[{i_{min} , i_{max} }] gives a pseudorandom integer in the range {i_{min} , i_{max} }.
RandomInteger[i_{max}] gives a pseudorandom integer in the range {0, …, i_{max} }.
RandomInteger[] pseudorandomly gives 0 or 1.
RandomInteger[$range$, n] gives a list of n pseudorandom integers.
RandomInteger[$range$, {n_1, n_2, …}] gives an $n_1 \times n_2 \times \ldots$ array of pseudorandom integers. »

Rozwiązać równanie a.v=b

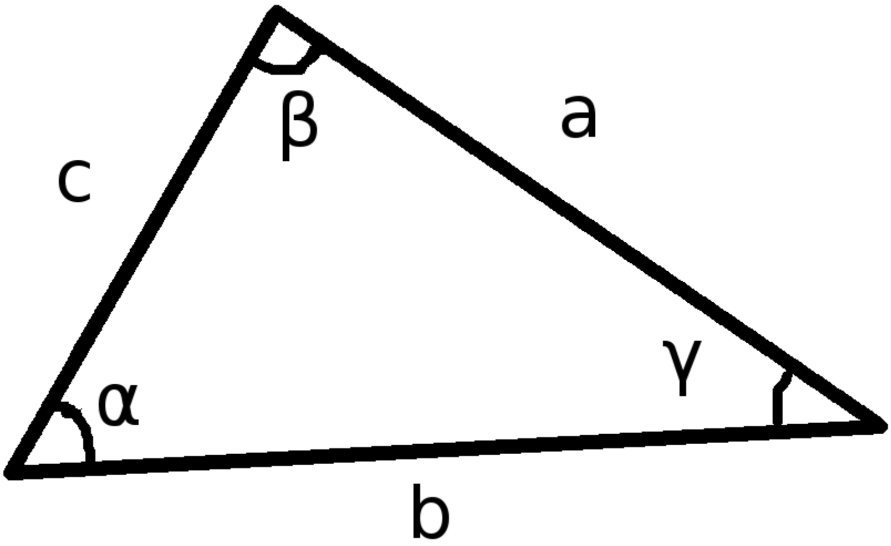
a) przy pomocy metody Gaussa - Jordana
(wskazówki:
utworzyć macierz rozszerzoną z macierzy a i wektora b,
przekształcić macierz rozszerzoną do postaci zredukowanej,
znaleźć rozwiązanie (w tym przypadku rozwiązanie z parametrem))

b) przy pomocy LinearSolve[]

c) przy pomocy Solve[]

Zadanie

Wyprowadzić twierdzenie cosinusów (uogólnione twierdzenie Pitagorasa)



z zależności trygonometrycznych:
a=b cos(γ)+ c cos(β)
b=c cos(α)+ a cos(γ)
c=a cos(β)+ b cos(α)

wskazówki:
przyjmij, że x=cos(α), y= cos(β), z=cos(γ)
utwórz macierz rozszerzoną tego układu równań
zredukuj ją

```
ClearAll[a, b, c]
```

Rządmacierzy

```
M = {{1, 2, 1, 0, 8}, {1, 1 / 2, 1, 1 / 3, 4}, {1, 2, 3, 1 / 2, 3}, {2, 4, 4, 1 / 2, 11}}
```

$\left\{\{1, 2, 1, 0, 8\}, \left\{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 4\right\}, \left\{1, 2, 3, \frac{1}{2}, 3\right\}, \left\{2, 4, 4, \frac{1}{2}, 11\right\}\right\}$

```
M // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & 4 \\ 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 4 & 4 & \frac{1}{2} & 11 \end{pmatrix}$$

Rząd macierzy

```
MatrixRank[M]
```

3

Minory

Minory o wymiarze 1

```
Minors[M, 1] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & 4 \\ 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 4 & 4 & \frac{1}{2} & 11 \end{pmatrix}$$

Minory o wymiarze 2

```
Minors[M, 2, Identity]  // MatrixForm
Minors[M, 2]  // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2\\1&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&\frac{1}{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&8\\1&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&1\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&8\\\frac{1}{2}&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&\frac{1}{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&8\\1&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&8\\\frac{1}{3}&4\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&8\\1&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&0\\2&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&8\\2&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\3&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&8\\3&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&8\\\frac{1}{2}&3\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\2&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&8\\2&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&1\\4&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&0\\4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&8\\4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&8\\4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&8\\\frac{1}{2}&11\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\1&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}\\1&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&4\\1&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\2&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&4\\2&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}\\3&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&4\\3&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{3}&4\\\frac{1}{2}&3\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\2&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}\\2&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&4\\2&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\4&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&4\\4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}\\4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&4\\4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{3}&4\\\frac{1}{2}&11\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\2&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&3\\2&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&3\\4&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}\\4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&3\\4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3&\frac{1}{2}\\4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3&3\\4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&3\\\frac{1}{2}&11\end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
-\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -4 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 4 & \frac{1}{3} & -4 & -\frac{8}{3}\\
0 & 2 & \frac{1}{2} & -5 & 4 & 1 & -10 & \frac{1}{2} & -21 & -4\\
0 & 2 & \frac{1}{2} & -5 & 4 & 1 & -10 & \frac{1}{2} & -21 & -4\\
\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{6} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{12} & -\frac{13}{2} & -\frac{1}{2} & -9 & -1\\
3 & 2 & -\frac{1}{6} & 3 & -2 & -\frac{13}{12} & -\frac{21}{2} & -\frac{5}{6} & -5 & \frac{5}{3}\\
0 & -2 & -\frac{1}{2} & 5 & -4 & -1 & 10 & -\frac{1}{2} & 21 & 4
\end{pmatrix}$$

Minory o wymiarze 3

```
Minors[M, 3, Identity]  // MatrixForm
Minors[M, 3]  // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&1\\1&\frac{1}{2}&1\\1&2&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2&0\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\1&2&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2&8\\1&\frac{1}{2}&4\\1&2&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&\frac{1}{3}\\1&3&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&8\\1&1&4\\1&3&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&8\\1&\frac{1}{3}&4\\1&\frac{1}{2}&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&1&0\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{3}\\2&3&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&2&1\\1&\frac{1}{2}&1\\2&4&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2&0\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2&8\\1&\frac{1}{2}&4\\2&4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&\frac{1}{3}\\2&4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&8\\1&1&4\\2&4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&8\\1&\frac{1}{3}&4\\2&\frac{1}{2}&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&1&0\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{3}\\4&4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&1\\\frac{1}{2}&1\\4&4\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&3\\2&4&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2&0\\1&2&\frac{1}{2}\\2&4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2&8\\1&2&3\\2&4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&\frac{1}{2}\\2&4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&8\\1&3&3\\2&4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&8\\1&\frac{1}{2}&3\\2&\frac{1}{2}&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&1&0\\2&3&\frac{1}{2}\\4&4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&1\\2&3\\4&4\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\1&2&3\\2&4&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\1&2&\frac{1}{2}\\2&4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&4\\1&2&3\\2&4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&\frac{1}{3}\\1&3&\frac{1}{2}\\2&4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&4\\1&3&3\\2&4&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&4\\1&\frac{1}{2}&3\\2&\frac{1}{2}&11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{3}\\2&3&\frac{1}{2}\\4&4&\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\2&3\\4&4\end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
-3 & -\frac{3}{4} & \frac{15}{2} & -\frac{2}{3} & 8 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{12} & -\frac{31}{2} & -\frac{16}{3} & -5\\
-3 & -\frac{3}{4} & \frac{15}{2} & -\frac{2}{3} & 8 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{12} & -\frac{31}{2} & -\frac{16}{3} & -5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-3 & -\frac{3}{4} & \frac{15}{2} & -\frac{2}{3} & 8 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{12} & -\frac{31}{2} & -\frac{16}{3} & -5
\end{pmatrix}$$

Minory o wymiarze 4

```
Minors[M, 4, Identity]  // MatrixForm
Minors[M, 4]  // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 11 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 4 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 4 & \frac{1}{2} & 11 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & 4 \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 4 & \frac{1}{2} & 11 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & 4 \\ 2 & 3 & \frac{1}{2} & 3 \\ 4 & 4 & \frac{1}{2} & 11 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Redukcja ukladu wektorow

```
RowReduce[M] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{36} & \frac{31}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ortonormalizacja układu wektorów

```
Orthogonalize[M]  // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{70}} & \sqrt{\frac{2}{35}} & \frac{1}{\sqrt{70}} & 0 & 4\sqrt{\frac{2}{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{31}} & -\frac{3}{\sqrt{31}} & \frac{3}{\sqrt{31}} & \frac{2}{\sqrt{31}} & 0 \\ -\frac{292}{\sqrt{33\,154\,345}} & \frac{3826}{\sqrt{33\,154\,345}} & \frac{4048}{\sqrt{33\,154\,345}} & 3\sqrt{\frac{35}{947\,267}} & -46\sqrt{\frac{31}{1\,069\,495}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie

Zbadać rząd macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- funkcją MatrixRank[]
- znajdując największy możliwy wymiar niezerowego minora macierzy
- RowReduce[] lub Orthonalize[]

Wartosci własne i wektory własne macierzy

```
m = {{1, 2, 0}, {2, 0, 1}, {1, 0, 0}}
```

{{1, 2, 0}, {2, 0, 1}, {1, 0, 0}}

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wartości własne:

```
Eigenvalues[m] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Wektory własne:

```
Eigenvectors[m] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1-\sqrt{3} & \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Wektory własne i wartości własne:

```
Eigensystem[m] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & -1 & 1-\sqrt{3} \\ \left\{1+\sqrt{3}, \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right), 1\right\} & \{-1, 1, 1\} & \left\{1-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right), 1\right\} \end{pmatrix}$$

Pierwszy wektor wlasny:

```
Eigenvectors[m][[1]]
```

$$\left\{1+\sqrt{3}, \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right), 1\right\}$$

drugi wektor wlasny:

```
Eigenvectors[m][[2]]
```

$\{-1, 1, 1\}$

trzeci wektor wlasny:

```
Eigenvectors[m][[3]]
```

$\left\{1-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right), 1\right\}$

```
m.Eigenvectors[m][[1]]
```

$\left\{4+2\sqrt{3}, 1+2\left(1+\sqrt{3}\right), 1+\sqrt{3}\right\}$

```
Eigenvalues[m][[1]] Eigenvectors[m][[1]]
```

$\left\{\left(1+\sqrt{3}\right)^2, \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right), 1+\sqrt{3}\right\}$

```
m.Eigenvectors[m][[1]] == Eigenvalues[m][[1]] Eigenvectors[m][[1]]
```

True

Zadanie

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sprawdzić działanie macierzy na wektory własne