
Wstęp do algebry

Zajęcia nr 3

Liczby zespolone

Jednostka urojona - duże i

I

i

Sqrt[-1]

i

v = 2 + 5 I

2 + 5 i

w = 1 + 2 I

1 + 2 i

w + v

3 + 7 i

w * v

-8 + 9 i

w / v

$\frac{12}{29} - \frac{i}{29}$

v^2

-21 + 20 i

Część rzeczywista i zespolona

Re[v]

2

Im[v]

5

Sprzeżenie liczby

Conjugate[v]

2 - 5 i

Abs[v]

$\sqrt{29}$

Re[1 / (a + I b)]

$\text{Re}\left[\frac{1}{a + i b}\right]$

Im[1 / (a + I b)]

$\text{Im}\left[\frac{1}{a + i b}\right]$

ComplexExpand[Re[1 / (a + I b)]]

$\frac{a}{a^2 + b^2}$

ComplexExpand[Im[1 / (a + I b)]]

$-\frac{b}{a^2 + b^2}$

? **ComplexExpand**

ComplexExpand[expr] expands *expr* assuming that all variables are real.

ComplexExpand[expr, {x₁, x₂, ...}] expands

expr assuming that variables matching any of the *x_i* are complex. >>

ComplexExpand[Exp[I a]]

$\text{Cos}[a] + i \text{Sin}[a]$

Zadanie

Zdefiniować dwie liczby zespolone

$$z_1 = a + i b$$

$$z_2 = c + i d$$

i znaleźć część rzeczywistą i urojoną

a) iloczynu $z_1 z_2$

b) ilorazu z_1 / z_2

Trzeba będzie użyć funkcji `ComplexExpand` aby współczynniki a, b, c, d były uznane za rzeczywiste

Postać wykładnicza

Liczbę zespoloną możemy zapisać w postaci wykładniczej

$$z = |z| e^{i \varphi}$$

argument φ :

`Arg[v]`

$$\text{ArcTan}\left[\frac{5}{2}\right]$$

Wartość w stopniach

`N[%] * 180 / Pi`

68.1986

Zdefiniujemy funkcję, która przekształca liczbę do postaci wykładniczej:

`PostacWykladnicza[z_] = Abs[z] Exp[I Arg[z]]`

$$e^{i \text{Arg}[z]} \text{Abs}[z]$$

`PostacWykladnicza[v]`

$$\sqrt{29} e^{i \operatorname{ArcTan}\left[\frac{5}{2}\right]}$$

Sprawdźmy czy po rozwinięciu postaci wykładniczej otrzymamy pierwotną postać liczby:

`ComplexExpand[PostacWykladnicza[v]]`

$$2 + 5 i$$

Postactrygonometryczna

chcemy przedstawić liczbę zespoloną w postaci $|z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$

`Abs[v] (Cos[Arg[v]] + I Sin[Arg[v]])`

$$2 + 5 i$$

Mathematica upraszcza nam to wyrażenie, musimy cos zrobić aby trzymała je w postaci

$$|z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

`PostacTrygonometryczna[z_] :=`

`Abs[z] * (Cos[InputForm[Arg[z]]] + I Sin[InputForm[Arg[z]]])`

`PostacTrygonometryczna[v]`

$$\sqrt{29} (\cos[\operatorname{ArcTan}[5/2]] + i \sin[\operatorname{ArcTan}[5/2]])$$

`PostacTrygonometryczna[Sqrt[3] + I]`

$$2 (\cos[\pi/6] + i \sin[\pi/6])$$

`PostacWykladnicza[Sqrt[3] + I]`

$$2 e^{i \frac{\pi}{6}}$$

? InputForm

InputForm[*expr*] prints as a version of *expr* suitable for input to the Wolfram Language. >>

Zadanie 2

Znalezc

- 1) część rzeczywistą i urojoną
- 2) argument φ i moduł
- 3) postać trygonometryczną
- 4) postać wykładniczą

liczb zespolonych:

$$x = 1 + i$$

$$y = 1 + i\sqrt{3}$$

Zadanie 3

Dla liczb zespolonych z poprzedniego zadania sprawdzić reguły

$$\arg(x \cdot y) = \arg(x) + \arg(y)$$

$$\arg(x/y) = \arg(x) - \arg(y)$$

$$\arg(1/x) = -\arg(x)$$

$$\arg(x^k) = k \arg(x), \text{ dla np } k=5$$

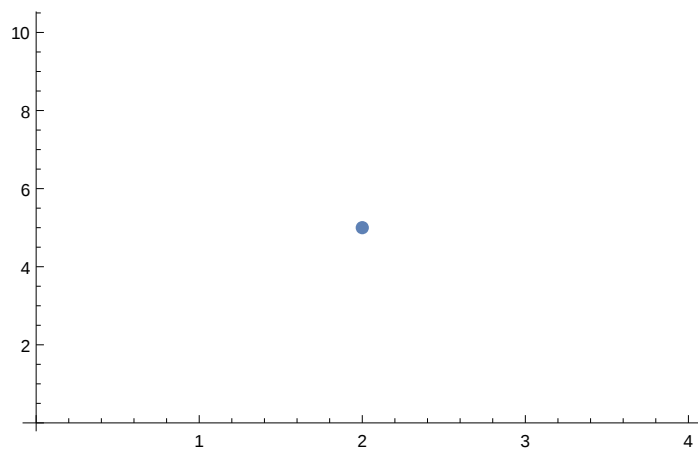
Graficzne przedstawienie liczby zespolonej

Liczbę zespoloną można przedstawić graficznie jako punkt na płaszczyźnie

```
ListaPunktow = {{Re[v], Im[v]}}  
{{2, 5}}
```

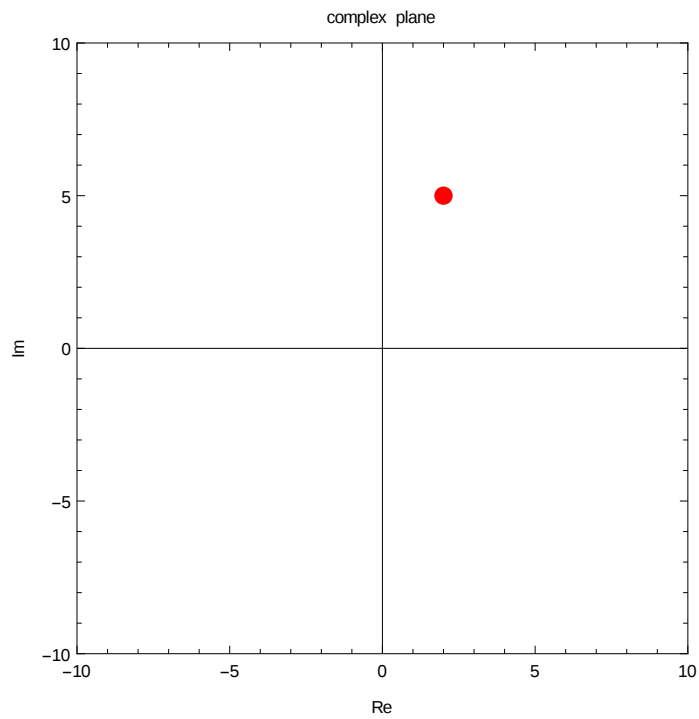
Wykres punktowy

```
ListPlot[ListaPunktow]
```



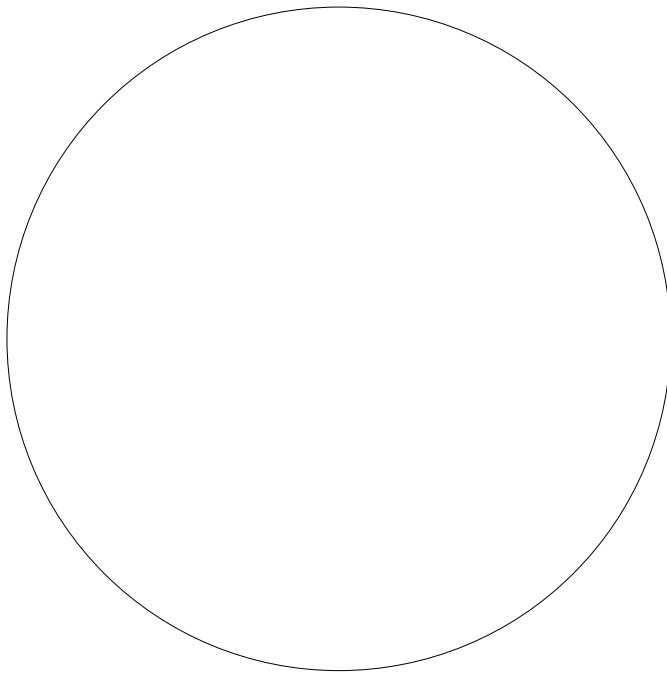
Wykres punktowy z dodatkowymi parametrami (położenie osi, zakresy osi, stosunek wysokości i szerokości, ramka, nazwy, kolor i wielkość punktu):

```
WykresPunktowy = ListPlot[ListaPunktow,  
  AxesOrigin → {0, 0},  
  PlotRange → {{-10, 10}, {-10, 10}},  
  AspectRatio → 1,  
  Frame → True,  
  FrameLabel → {{Im, None}, {Re, "complex plane"}},  
  PlotStyle → Directive[Red, PointSize[.03]]  
]
```



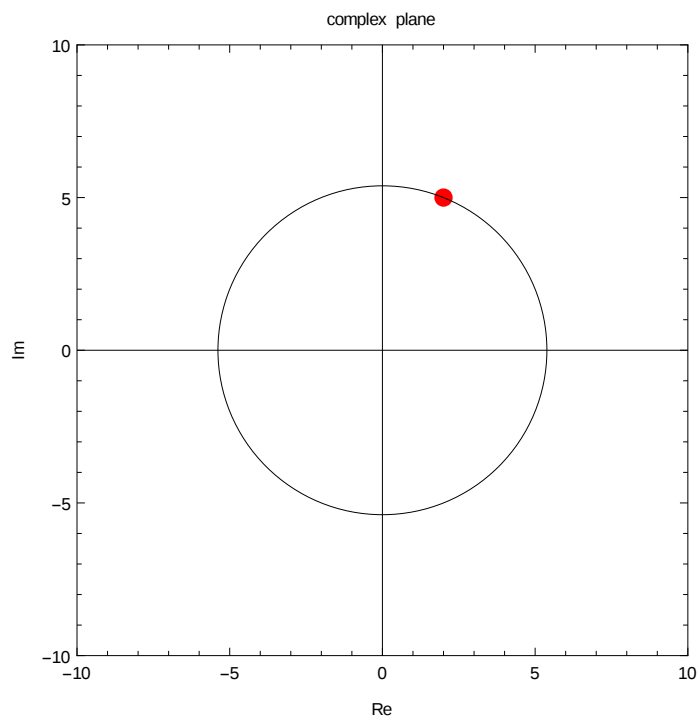
Okrąg o promieniu równym modułowi liczby v

```
Okrag = Graphics@Circle[{0, 0}, Abs[v]]
```



Wykres punktowy i okrąg przedstawione razem:

```
Show[WykresPunktowy, Okrag]
```



Zadanie4

Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej liczbę $3+7i$, liczbę do niej sprzężoną oraz okrąg o promieniu równym ich modułowi

Pierwiastkliczb

Mathematica podaje tylko jedna wartosc pierwiastka:

$$(-1)^{1/2}$$

i

```
Clear[x]
```

Rozwiązania równania

```
Solve[x^2 == -1, x]
```

```
{{x -> -i}, {x -> i}}
```

```
s = Solve[x^3 == 2, x]
```

```
{{x -> -(-2)^(1/3)}, {x -> 2^(1/3)}, {x -> (-1)^(2/3) 2^(1/3)}}
```

Wartości rozwiązań

```
x /. s
```

```
{-(-2)^(1/3), 2^(1/3), (-1)^(2/3) 2^(1/3)}
```

```
WszystkiePierwiastki[z_, n_] := x /. Solve[x^n - z == 0, x]
```

```
WszystkiePierwiastki[2, 3]
```

```
{-(-2)^(1/3), 2^(1/3), (-1)^(2/3) 2^(1/3)}
```

Wartości rozwiązań w postaci wykładniczej:

```
WszystkiePierwiastkiWykl[z_, n_] :=
```

```
PostacWykladnicza[x] /. Solve[x^n - z == 0, x]
```

Graficzne przedstawienie pierwiastków

Wszystkie pierwiastki 5-go stopnia liczby 2

`s = WszystkiePierwiastki[2, 5]`

$$\{ -(-2)^{1/5}, 2^{1/5}, (-1)^{2/5} 2^{1/5}, -(-1)^{3/5} 2^{1/5}, (-1)^{4/5} 2^{1/5} \}$$

`Re[s]`

$$\left\{ -\frac{1 + \sqrt{5}}{2 \times 2^{4/5}}, 2^{1/5}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times 2^{4/5}}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times 2^{4/5}}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times 2^{4/5}} \right\}$$

`Im[s]`

$$\left\{ -2^{1/5} \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}, 0, 2^{1/5} \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}, -2^{1/5} \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}, 2^{1/5} \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} \right\}$$

Przedstawmy pierwiastki w postaci listy par $\{\text{Re}(z), \text{Im}(z)\}$

`ListaPunktow3 = Table[{Re[s[[i]]], Im[s[[i]]]}, {i, 1, 5}]`

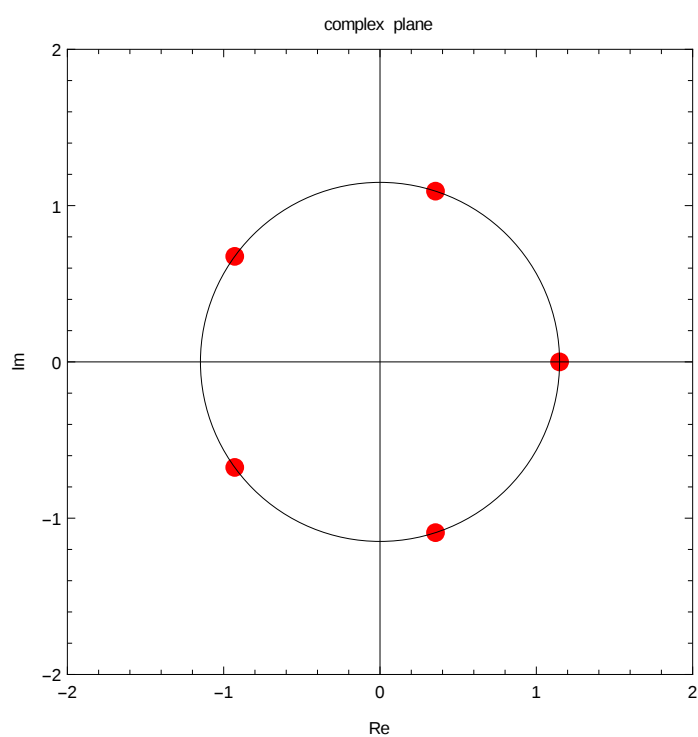
$$\left\{ \left\{ -\frac{1 + \sqrt{5}}{2 \times 2^{4/5}}, -2^{1/5} \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} \right\}, \{2^{1/5}, 0\}, \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times 2^{4/5}}, 2^{1/5} \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times 2^{4/5}}, -2^{1/5} \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} \right\}, \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times 2^{4/5}}, 2^{1/5} \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} \right\} \right\}$$

Przedstawmy wszystkie pierwiastki 5-go stopnia liczby 2 na wykresie

`Okrag3 := Graphics@Circle[{0, 0}, Abs[s[[1]]]]`

```
WykresPunktowy3 := ListPlot[ListaPunktow3,
  AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}},
  AspectRatio -> 1,
  Frame -> True,
  FrameLabel -> {{Im, None}, {Re, "complex plane"}},
  PlotStyle -> Directive[Red, PointSize[.03]]
]
```

Show[WykresPunktowy3, Okrag3]



Zadanie 5

Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej wszystkie pierwiastki 8. stopnia liczby $(5i)$ oraz okrąg o promieniu równym ich modułowi