Wstęp do algebry
Zajęcia nr 5

Zadanie 1

Wprowadźmy pojęcie komutatora:
[a,b]=a b - b a
oraz antykomutatora
{a,b}=a b+b a

Zdefiniuj funkcje dwóch zmiennych Komutator[a,b] oraz AntyKomutator[a,b] , które pobierają macierze i zwracają ich komutator/antykomutator.

Sprawdzic własność:

Komutator[σ_x, σ_y]=2 i $\sum_{z=1}^{3} \epsilon_{xyz} \; \sigma_z$
dla
a) x=1, y=2
b) x=1, y=3
c) x=1, y=1

AntyKomutator[σ_x, σ_y]=2 $\delta_{xy} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
dla
a) x=1, y=2
b) x=1, y=3
c) x=1, y=1

Macierze Pauliego a SU(2)

```
u1[x_] := I x PauliMatrix[1]
u2[x_] := I x PauliMatrix[2]
u3[x_] := I x PauliMatrix[3]
```

```
u1[x] // MatrixForm
u2[x] // MatrixForm
u3[x] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & i x \\ i x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i x & 0 \\ 0 & -i x \end{pmatrix}$$

```
? MatrixExp
```

MatrixExp[m] gives the matrix exponential of m.
MatrixExp[m, v] gives the matrix exponential of m applied to the vector v. >>

Zdefinujmy funkcje postaci $e^{i x \sigma_k}$

```
e1[x_] := MatrixExp[u1[x]]
e2[x_] := MatrixExp[u2[x]]
e3[x_] := MatrixExp[u3[x]]
```

```
e1[x] // MatrixForm
e2[x] // MatrixForm
e3[x] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[x] & i\,\text{Sin}[x] \\ i\,\text{Sin}[x] & \text{Cos}[x] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[x] & \text{Sin}[x] \\ -\text{Sin}[x] & \text{Cos}[x] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{i x} & 0 \\ 0 & e^{-i x} \end{pmatrix}$$

Zadanie2

Pokaż, że macierze e1[x], e2[x], e3[x] :
- sa unitarne tzn: $A^{-1} = A^{\dagger}$
- ich wyznacznik wynosi 1

Wartosci własne i wektory wlasne macierzy

Wielomian charakterystyczny

```
M := {{1, 2, 0}, {2, 0, 1}, {1, 0, 0}}
```

```
M // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Stwóżmy wielomian charakterystyczny:

```
? IdentityMatrix
```

IdentityMatrix[n] gives the $n \times n$ identity matrix. >>

```
IdentityMatrix[3] * λ  // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

```
wielomiancharakterystyczny[λ_] = Det[M - IdentityMatrix[3] * λ]
```

$2 + 4\lambda + \lambda^2 - \lambda^3$

Wielomian charakterystyczny wywołujemy za pomocą funkcji CharacteristicPolynomial

```
? CharacteristicPolynomial
```

CharacteristicPolynomial[m, x] gives the characteristic polynomial for the matrix m.
CharacteristicPolynomial[{m, a}, x] gives the generalized characteristic polynomial with respect to a. >>

CharacteristicPolynomial[m, x] gives the characteristic polynomial for the matrix m.
\nCharacteristicPolynomial[{m, a}, x] gives the generalized characteristic polynomial with respect to a. >>

```
CharacteristicPolynomial[M, λ]
```

$2 + 4\lambda + \lambda^2 - \lambda^3$

Rozwiązujemy równanie wielomiancharakterystyczny(λ)==0. Rozwiączania to wartości własna macierzy

```
eigenval = Solve[wielomiancharakterystyczny[λ] == 0, λ]
```

$\{\{\lambda \to -1\}, \{\lambda \to 1 - \sqrt{3}\}, \{\lambda \to 1 + \sqrt{3}\}\}$

```
eigenval[[1]]
```

$\{\lambda \to -1\}$

```
eigenval[[2]]
```

$\{\lambda \to 1 - \sqrt{3}\}$

```
eigenval[[3]]
```

$\{\lambda \to 1 + \sqrt{3}\}$

Mamy 3 różne wartości własne.

Stworzymy teraz równania na wektory własne:

Dla pierwszej wartości własnej λ1=-1:

```
λ1 = λ /. eigenval[[1]] (* wartosc własna *)
```

-1

```
Solve[M.{x, y, z} == λ1 {x, y, z}, {y, z}]  (* rownanie na wektor własny *)
```

{{y → -x, z → -x}}

```
v1 = {x, y, z} /. First[Solve[M.{x, y, z} == λ1 {x, y, z}, {y, z}]] (* wektor własny *)
```

{x, -x, -x}

Dla drugiej wartości własnej $\lambda 2 = 1 - \sqrt{3}$:

```
λ2 = λ /. eigenval[[2]] (* wartosc własna *)
```

$1 - \sqrt{3}$

```
Solve[M.{x, y, z} == λ2 {x, y, z}, {y, z}] (* rownanie na wektor własny *)
```

$\left\{\left\{y \to -\frac{\sqrt{3}\, x}{2},\ z \to \frac{1}{2}\left(-x - \sqrt{3}\, x\right)\right\}\right\}$

```
v2 = {x, y, z} /. First[Solve[M.{x, y, z} == λ2 {x, y, z}, {y, z}]]  (* wektor własny *)
```

$\left\{x,\ -\frac{\sqrt{3}\, x}{2},\ \frac{1}{2}\left(-x - \sqrt{3}\, x\right)\right\}$

Dla trzeciej wartości własnej $\lambda 3 = 1 + \sqrt{3}$:

```
λ3 = λ /. eigenval[[3]] (* wartosc własna *)
```

$1 + \sqrt{3}$

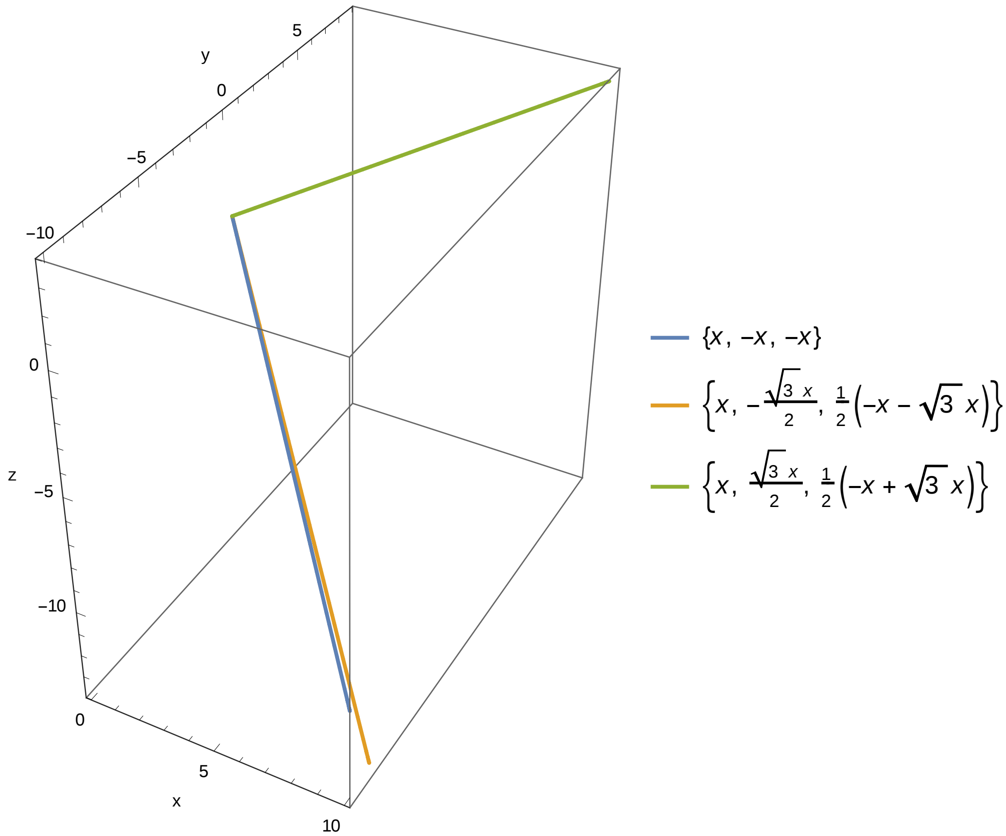
```
Solve[M.{x, y, z} == λ3 {x, y, z}, {y, z}] (* rownanie na wektor własny *)
```

$\left\{\left\{y \to \frac{\sqrt{3}\, x}{2},\ z \to \frac{1}{2}\left(-x + \sqrt{3}\, x\right)\right\}\right\}$

```
v3 = {x, y, z} /. First[Solve[M.{x, y, z} == λ3 {x, y, z}, {y, z}]]  (* wektor własny *)
```

$\left\{x,\ \frac{\sqrt{3}\, x}{2},\ \frac{1}{2}\left(-x + \sqrt{3}\, x\right)\right\}$

```
ParametricPlot3D[{v1, v2, v3}, {x, 0, 10},
 AxesLabel → {"x", "y", "z"}, PlotLegends → "Expressions"]
```



Uzyskaliśmy całą rodzinę rozwiązań, wektory własne są zdefiniowane z dokładnością do stałej multiplikatywnej.

Rozwiązanie na skróty:

Funkcje Eigenvalues[], Eigenvectors[], Eigensystem[]

Wartości własne:

```
Eigenvalues[M] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Wektory własne

```
Eigenvectors[M] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1-\sqrt{3} & \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Wektory własne i wartości własne:

```
Eigensystem[M] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & -1 & 1-\sqrt{3} \\ \left\{1+\sqrt{3}, \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right), 1\right\} & \{-1, 1, 1\} & \left\{1-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right), 1\right\} \end{pmatrix}$$

Pierwszy wektor wlasny i wartosc wlasna:

```
w1 = Eigenvectors[M][[1]]
L1 = Eigenvalues[M][[1]]
```

$$\left\{1+\sqrt{3}, \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right), 1\right\}$$

$$1+\sqrt{3}$$

Drugi wektor wlasny i wartosc wlasna:

```
w2 = Eigenvectors[M][[2]]
L2 = Eigenvalues[M][[2]]
```

$$\{-1, 1, 1\}$$

$$-1$$

Trzeci wektor wlasny i wartosc wlasna:

```
w3 = Eigenvectors[M][[3]]
L3 = Eigenvalues[M][[3]]
```

$$\left\{1-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right), 1\right\}$$

$$1-\sqrt{3}$$

Sprawdzmy czy dzialanie macierzy na pierwszy wektor wlasny jest równe pomnożeniu wektora przez odpowiadająca mu wartość własną:

```
M.w1 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 4+2\sqrt{3} \\ 1+2\left(1+\sqrt{3}\right) \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

```
L1 w1  // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \left(1+\sqrt{3}\right)^2 \\ \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right) \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

```
L1 w1 == M.w1
```

```
True
```

Zadanie 3

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) przy pomocy wielomianu charakterystycznego i równań na wektory własne
b) przy pomocy Eigenvalues i Eigenvectors

Porównac wynik działania macierzy na wektory wląsne z wynikiem mnożenia wektorów własnych przez odpowiadające im wartości własne

Zadanie 4

Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy Pauliego

Diagonalizacja.

U - macierz, ktorej kolumnami są wektory własne

Macierz diagonalna: U^{-1}M U

```
U = Transpose[Eigenvectors[M]]
```

$$\left\{\left\{1+\sqrt{3},\ -1,\ 1-\sqrt{3}\right\},\ \left\{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right),\ 1,\ \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\right\},\ \{1,\ 1,\ 1\}\right\}$$

```
MacierzOdwrotna = Inverse[U]
```

$$\left\{\left\{\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}},\ \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\ \frac{-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}\right\},\ \{-1,\ 2,\ -2\},\ \left\{\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}},\ \frac{-2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\ \frac{\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

```
MacierzOdwrotna // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} & \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & \frac{-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \\ -1 & 2 & -2 \\ \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & \frac{\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

```
M2 = Simplify[Inverse[U].M.U]
```

$$\left\{\left\{1+\sqrt{3},\ 0,\ 0\right\},\ \{0,\ -1,\ 0\},\ \left\{0,\ 0,\ 1-\sqrt{3}\right\}\right\}$$

```
M2 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Macierz jest po tej transformacji diagonalna, a na przekątnej mamy wartości własne

Jak zmieniły się wartości i wektory własne?

```
Eigenvalues[M2]
```

$\left\{1+\sqrt{3}, -1, 1-\sqrt{3}\right\}$

```
Eigenvectors[M2]
```

{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

Zadanie 5

Zdiagonalizować macierz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Warunek diagonalizowalności macierzy

```
DiagonalizableMatrixQ[M]
```

```
True
```

```
? DiagonalizableMatrixQ
```

DiagonalizableMatrixQ[m] gives True if m is diagonalizable, and False otherwise. ≫

```
B = {{2, 1, 0}, {0, 2, 1}, {0, 0, 2}}
```

```
{{2, 1, 0}, {0, 2, 1}, {0, 0, 2}}
```

```
B // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
DiagonalizableMatrixQ[B]
```

```
False
```

```
Eigensystem[B] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \{1, 0, 0\} & \{0, 0, 0\} & \{0, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

```
CharacteristicPolynomial[B, λ]
```

$8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$

```
Solve[CharacteristicPolynomial[B, λ] == 0, λ]
```

```
{{λ → 2}, {λ → 2}, {λ → 2}}
```

Krotność algebraiczna wartości wlasnej λ= 2 wynosi 3, ile wynosi jej krotnosc geometryczna (wymiar podprzestrzeni rozpietej przez jej wektory wlasne)

```
Solve[B.{x, y, z} == 2 {x, y, z}, {y, z}]
```

```
{{y → 0, z → 0}}
```

```
v1 = {x, y, z} /. First[Solve[B.{x, y, z} == 2 {x, y, z}, {y, z}]]
```

```
{x, 0, 0}
```

Jeden wektor własny odpowiadający wartości własnej λ= 2 - krotnosc geometryczna wynosi 1 a algebraiczna 3. Macierz nie jest diagonalizowalna.

Zadanie 6

Sprawdzic czy macierz S jest diagonalizowalna

$$S=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Zadanie 7

Policzyć wektory własne i wartości własne macierzy, której elementy to “tabliczka mnożenia” 10x10, następnie sprowadzić macierz do postaci diagonalnej.

```
T = Table[i * j, {i, 1, 10}, {j, 1, 10}]
```