Wstęp do algebry
Zajęcia nr 6

Warunek diagonalizowalności macierzy

```
M = {{2, 1, 0}, {0, 2, 1}, {0, 0, 2}}
```

{{2, 1, 0}, {0, 2, 1}, {0, 0, 2}}

```
M // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wektory i wartości własne macierzy M:

```
Eigensystem[M] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \{1, 0, 0\} & \{0, 0, 0\} & \{0, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy M:

```
CharacteristicPolynomial[M, λ]
```

$8 - 12 \lambda + 6 \lambda^2 - \lambda^3$

```
Solve[CharacteristicPolynomial[M, λ] == 0, λ]
```

$\{\{\lambda \to 2\}, \{\lambda \to 2\}, \{\lambda \to 2\}\}$

Krotność algebraiczna wartości własnej λ - krotność λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

W tym przypadku krotność algebraiczna wartości wlasnej $\lambda = 2$ wynosi 3

Krotnosc geometryczna wartości własnej λ - wymiar podprzestrzeni rozpietej przez wektory wlasne odpowiadające wartości własnej λ

Ile wynosi w tym przypadku krotnosc geometryczna wartości wlasnej λ= 2?

```
Eigensystem[M] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \{1, 0, 0\} & \{0, 0, 0\} & \{0, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

```
Solve[M.{x, y, z} == 2 {x, y, z}, {y, z}]
```

```
{{y → 0, z → 0}}
```

```
v1 = {x, y, z} /. First[Solve[M.{x, y, z} == 2 {x, y, z}, {y, z}]]
```

```
{x, 0, 0}
```

Jeden wektor własny odpowiadający wartości własnej λ= 2 - krotnosc geometryczna wynosi 1 a algebraiczna 3. Macierz nie jest diagonalizowalna.

Zadanie 1

Dla macierzy:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oraz B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) znaleźć wielomian charkterystyczny (CharacteristicPolynomial)
b) znaleźć wektory i wartości własne (Eigenvectors i Eigenvalues)

Która z tych macierzy jest diagonalizowalna? (czy krotnośc algebraiczna każdej wartości własnej równa sie jej krotności geometrycznej?)

Zadanie 2

Dla diagonalizowalnej macierzy z poprzedniego zadania
a) Utworzyc macierz przejscia S, której kolumnami sa wektory włąsne macierzy i zdiagonalizować macierz
b) Obliczyć 4 – tą potegę macierzy (MatrixPower) i sprawdzic jakie ma wartosci własne

MatrixFunction funkcja której argumentem jest macierz

f-funkcja skalarna

A- macierz, np 2x2

A=$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}$

f[A] daje efekt:
$\begin{pmatrix} f[A_1^1] & f[A_2^1] \\ f[A_1^2] & f[A_2^2] \end{pmatrix}$

Natomiast
MatrixFunction[f,A]
traktuje funkcje f jako funkcje o argumentach macierzowych

f[A] i MatrixFunction[f,A] nie dają tego samego wyniku!

```
? MatrixFunction
```

MatrixFunction[*f*, *m*] gives the matrix generated by the scalar function *f* at the matrix argument *m*. »

Przykład1:

```
f[x_] = x^3
```

x^3

```
A = {{a, b}, {c, d}}
```

```
{{a, b}, {c, d}}
```

```
A // MatrixForm
```

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

wynikiem f[A] bedzie macierz, której elementy to elementy macierzy A podniesione do potegi 3

```
f[A] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

Wynikiem MatrixFunction[f,A] bedzie macierz A podniesiona do potegi 3 (mnozenie macierzowe A.A.A)

```
MatrixFunction[f, A] // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} a^3+2\,a\,b\,c+b\,c\,d & b\,(a^2+b\,c+a\,d+d^2) \\ c\,(a^2+b\,c+a\,d+d^2) & a\,b\,c+2\,b\,c\,d+d^3 \end{pmatrix}$$

```
A.A.A // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} a^3+2\,a\,b\,c+b\,c\,d & b\,(a^2+b\,c+a\,d+d^2) \\ c\,(a^2+b\,c+a\,d+d^2) & a\,b\,c+2\,b\,c\,d+d^3 \end{pmatrix}$$

Przykład2:

```
B = {{1, 0}, {1, 1}}
```

{{1, 0}, {1, 1}}

```
B // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Exp[B] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} e & 1 \\ e & e \end{pmatrix}$$

Ten wynik wzial sie stąd że:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Exp}[B_1^1] & \mathrm{Exp}[B_2^1] \\ \mathrm{Exp}[B_1^2] & \mathrm{Exp}[B_2^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Exp}[1] & \mathrm{Exp}[0] \\ \mathrm{Exp}[1] & \mathrm{Exp}[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 1 \\ e & e \end{pmatrix}$$

Teraz chcemy uzyskać e^B

```
MatrixFunction[Exp, B] // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ e & e \end{pmatrix}$$

Ten wynik wziął sie stąd że:

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = 1 + B + \frac{1}{2!} B^2 + \frac{1}{3!} B^3 + \ldots$$

dla B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^B=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\text{MatrixPower}\left[\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},k\right]=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}+\ldots=\begin{pmatrix}e^1&0\\e^1&e^1\end{pmatrix}$$

```
MatrixPower[B, k]
```

```
{{1, 0}, {k, 1}}
```

```
Sum[1 / (k !) MatrixPower[B, k], {k, 0, Infinity}]
```

```
{{e, 0}, {e, e}}
```

Przykład3:

```
f[x_] = 1 / x
```

$$\frac{1}{x}$$

```
S = {{1, 2}, {3, 4}}
```

```
{{1, 2}, {3, 4}}
```

```
f[S] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

```
MatrixFunction[f, S] // MatrixForm // Simplify
```

$$\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

```
Inverse[S] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Zadanie3

Zdefiniuj funkcję f:

f(x)=1 +x^2 + 4 x^3 + 2x^4+x^5

oraz macierz A= $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

a) wygeneruj macierz A2, bedaca wynikiem funkcji f z argumentem macierzowym A (MatrixFunction z argumentami f i A)
b) znajdz wartosci wlasne macierzy A oraz wartosci wlasne macierzy A2
c) pokaż, że wartosci wlasne A2 to $f(\lambda_i)$, gdzie λ_i to wartości wlasne macierzy A

to samo zrób dla funkcji f(x)=sin(x)

Diagonalizaja macierzy hermitowskich

Zadanie 4

Stwórz macierz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -i & -1 \\ i & -2 & -i \\ -1 & i & 3 \end{pmatrix}$$

{{3, -i, -1}, {i, -2, -i}, {-1, i, 3}}

1) Sprawdź czy jest ona hermitowska, tzn : $M^{\dagger}$==M (ConjugateTranspose)

2) Znajdz jej wektory wlasne (Eigenvectors) i wartości wlasne (Eigenvalues) macierzy M

3) Stwórz macierz przejścia S, ktorej kolumnami sa wektory wlasne i wykonaj działanie
S^{-1}M S
aby otrzmać macierz diagonalną

4) Pokaż, że dla każdej pary v i w różnych wektorów własnych zachodzi
v.Conjugate[w] == 0 (są prostopadłe)

5) Unormuj wektory własne (podziel przez ich normę, Norm[]) i stwórz macierz U, ktorej kolumnami sa unormowane wektory wlasne
wykonaj działanie $U^{\dagger}$M U

6) pokaż ze macierz U jest unitarna tzn : $U^{\dagger} U = UU^{\dagger} = 1$

Zadanie 5

Policzyc wartości własne i wektory własne macierzy, której ementy to "tabliczka mnozenia" 10x10
Sprowadzic macierz do postaci diagonalnej.

```
T = Table[i * j, {i, 1, 10}, {j, 1, 10}]
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20},
 {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}, {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40},
 {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}, {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60},
 {7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70}, {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80},
 {9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90}, {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}}
```

Macierz idempotentna

Macierz idempotentna ma własność:
A^2==A

Wartości własne macierzy idempotętnej to 0 lub 1
$Av = \lambda v = \lambda^2 v = A^2 v$

jeżeli A jest idempotentan to dla dowolnej macierzy nieosobliwej S macierz S^{-1} A S też jest idempotentna

Zadanie 6

Podzielić macierz T przez jedyna niezerowa wartosc wlasna
Sprawdzić czy uzyskana macierz jest idempotentna