JERZY LUKIERSKI
Uniwersytet Wrocławski

Nowe koncepcje przestrzeni i czasu w opisie mikroświata

1. Dlaczego konsekwentne zastosowanie idei Einsteina prowadzi do dodawania nowych wymiarów?
2. Jak mechanika kwantowa przyczynia się do destrukcji pojęcia klasycznej czasoprzestrzeni?
3. Która geometria jest bardziej podstawowa - spinorowa czy wektorowa - czyli o pasji naukowej J. Rzewuskiego i R. Penrose'a.

1. Uwagi historyczne

Można wyodrębnić dwa podejścia ontologiczne do pojęcia przestrzeni i czasu:

i) Przestrzeń i czas są kategoriami absolutnymi, pierwotnymi

Podstawową cechą takiego podejścia jest traktowanie czasu i przestrzeni jako areny niezależnej od umieszczonej na niej rzeczywistości fizycznej. O takiej przestrzeni i takim czasie pisze największy w starożytności filozof przyrody, Arystoteles. Dla niego przestrzeń jest absolutna, ze środkiem, oraz czas absolutny, z początkiem zadającym stworzenie Wszechświata. W czasach nowożytnych ostatnim wielkim zwolennikiem absolutnej przestrzeni i czasu był Newton. Pierwszy wyłom w absolutyzmie pojęć czasu i przestrzeni został dokonany przez Galileusza, który wprowadził równoważność przestrzeni przesuniętej o translacje i obrót (tzw. przekształcenia Galileusza). Absolutność przestrzeni została zastąpiona pojęciem przestrzeni równoważnych, powiązanych przekształceniami symetrii czasu i przestrzeni. W szczególności koncepcja przestrzeni Galileusza, w zgodzie z kopernikańską teorią układu planetarnego, nie pozwalała nazywać kulę ziemską środkiem Wszechświata.

ii) Przestrzeń i czas to konstrukty opisujące relacje pomiędzy obiektami fizycznymi we wszechświecie.

Wraz z rozwojem podejścia doświadczalnego do prawidłowości natury stawał się coraz bardziej popularnym pogląd, że formy materii, zjawiska fizyczne, są realizowane w kategoriach przestrzennych, a czas to miara zmian, ewolucji zjawisk. Ukoronowaniem tego stanowiska jest podejście do czasu i przestrzeni zaproponowane przez Einsteina, który połączył czas i przestrzeń w pojęcie czasoprzestrzeni. Świat materialny jest opisany zdarzeniami, których podstawowym atrybutem są współrzędne czasoprzestrzeni. Istotnym postulatem ogólnej teorii względności (teorii grawitacji) Einsteina jest postrzeżenie, że to materia określa formę czasoprzestrzeni. Należy podkreślić, że z teorii grawitacji wynikają dwa wnioski:

i) Geometria czasoprzestrzeni, jej zakrzywienie, zależy od obecnej w niej materii. Wyrażamy to zasadą, że gęstość materii opisuje źródła pola grawitacyjnego

ii) Okazuje się, że nawet bez obecności źródeł materii nie istnieje pusta czasoprzestrzeń - gdyż istnieje "materia geometryczna" - samo pole grawitacyjne. W szczególności taka czasoprzestrzeń bez źródeł materii może mieć ciekawe własności, np. swoiste "zmarszczki", opisane falami grawitacyjnymi.

Należy ponadto dodać, że istnieje argument za brakiem pustej przestrzeni, który ma swoje źródło w teorii kwantowej. Kwantowa czasoprzestrzeń bez materii jest wypełniona tzw. wirtualnymi procesami kwantowymi. Okazuje się jednak, że taka próżnia wypełniona jednorodnie wirtualnymi procesami kwantowymi może być zinterpretowana jako próżnia realistyczna, tzw. próżnia fizyczna.

2. Czasoprzestrzeń relatywistyczna

Rewolucja einsteinowska (r. 1905) jest oparta na następującej zmianie podstawowej geometrii

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Absolutna przestrzeń} & & \text{czasoprzestrzeń} \\
\text{absolutny czas} & & (\mu = 0,1,2,3) \\
& & \\
\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3; t & \Rightarrow & X_\mu = (\overrightarrow{X}, X_0 = ct) \\
& & \\
\text{fizyka} & & \text{fizyka} \\
\text{nierelatywistyczna} & & \text{relatywistyczna}
\end{array} \qquad (1)
$$

Mnożąc czas przez uniwersalną prędkość światła c (c $\simeq$ 300 000 km/sek) możemy wyrazić upływ czasu w jednostkach długości:

$$t \quad \longrightarrow \quad X_0 = c \cdot t \qquad \text{(czwarty wymiar)} \qquad (2)$$

Czasoprzestrzeń relatywistyczna nie posiada ani wyróżnionego środka ani nie ma w niej wyróżnionego kierunku. Jest to treścią tzw. specjalnej zasady względności (równoważności), w której dodatkowo jeszcze postulujemy, że dwa układy czasoprzestrzenne poruszające się względem siebie ze stałą prędkością są fizycznie równoważne. Pełna klasa równoważnych układów czasoprzestrzennych jest opisana 10-parametrowymi przekształceniami symetrii Poincaré, na które składają się następujące przekształcenia:

1) Translacje przestrzenne (a_i - dowolny trójwektor; $i = 1, 2, 3$)

$$X_i = X_i + a_i \tag{3}$$

Równoważność układów fizycznych względem przekształceń (1) oznacza brak wybranego środka przestrzeni

2) Translacje czasowe (b - dowolna stała)

$$t' = t + b \tag{4}$$

Niezmienniczość praw fizyki względem przekształceń (4) oznacza ich niezależność od czasu, w którym przeprowadzamy badania (fizyka jest taka sama w dowolnej chwili przeszłości jak i przyszłości).

3) Obroty przestrzenne (dla prostoty opiszemy obroty dookoła trzeciej osi: α - kąt obrotu)

$$\begin{aligned} X_1' &= \cos\alpha\, X_1 + \sin\alpha\, X_2 \\ X_2' &= -\sin\alpha\, X_2 + \cos\alpha\, X_2 \\ X_3' &= X_3 \end{aligned} \tag{5}$$

Niezmienniczość praw fizyki względem przekształceń (5) oznacza, że w przestrzeni nie ma wyróżnionego kierunku

4) Obroty pseudoeuklidesowe pomiędzy kierunkiem przestrzennym i osią czasową, opisujące ruch względny dwóch układów odniesienia ze stałą prędkością v.

Rozważmy dla prostoty ruch jednostajny wzdłuż osi X_1 ze stałą prędkością v. Zamiana współrzędnych czasoprzestrzeni

$$(X_1, X_2, X_3, X_0 = ct) \longrightarrow (X_1', X_2, X_3, X_0' = ct') \tag{6}$$

jest opisana wzorem ($\beta = \frac{v}{c} + \ldots$)

$$\begin{aligned} X_0' &= \sinh\, \beta X_1 + \cosh\, \beta \cdot X_0 \\ X_1' &= \cosh\, \beta X_1 + \sinh\, \beta \cdot X_0 \end{aligned} \tag{7}$$

Uwzględniając rozwinięcie hiperbolicznych funkcji $\sin\beta$, $\cos\beta$ w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} \sinh\beta &= \beta + \tfrac{\beta^3}{6} + \ldots \\ \cosh\beta &= 1 + \tfrac{\beta^2}{2} + \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
X_1' &= \left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\ldots\right)X_1+\left(\frac{v}{c}+\frac{1}{6}\frac{v^3}{c^3}+\ldots\right)ct \\
ct' &= \left(\frac{v}{c}+\cdots\right)X_1+\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\ldots\right)ct \qquad (9)
\end{aligned}
$$

W granicy $c \to \infty$ z formuły (9) wynika nierelatywistyczny wzór Galileusza:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= X_1 + v \cdot t \\
t' &= t \qquad (10)
\end{aligned}
$$

łączący opis przestrzenny i czasowy dwóch układów nierelatywistycznych.

Łatwo zauważyć, że obrót hiperboliczny (7) pozostawia niezmienniczą następującą formą kwadratową:

$$X_1^2 - X_0^2 = \mathrm{inv} \qquad (11)$$

Obroty (7) noszą nazwę obrotów Lorentza. Jest ich trzy, opisują one obroty w następujących trzech płaszczyznach:

$$(X_1, X_0),\ (X_2, X_0),\ (X_3, X_0) \qquad (12)$$

Dodając do trzech obrotów Lorentza trzy niezależne obroty opisujące obroty trójwymiarowej przestrzeni (patrz także (5))

$$(X_1, X_2),\ (X_1, X_3),\ (X_2, X_3) \qquad (13)$$

otrzymujemy sześcioparametrową grupę obrotów Lorentza, zachowujących nie zmienioną następującą formę kwadratową:

$$S^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0^2 \qquad (14)$$

Fizyka relatywistyczna opisuje prawa fizyki, które są niezmiennicze względem przekształceń grupy Poincaré (wzory (3),(4), (5) i (7)).

Znak "$-$" przed ostatnim członem wzoru (14) jest bardzo ważny - jest on konieczny do opisu dynamiki relatywistycznej przy pomocy hiperbolicznych równań różniczkowych. Równania te prowadzą do przyczynowej dynamiki fizyki relatywistycznej, do przyczynowej ewolucji w czasie układów fizycznych, w ramach której przeszłość określa przyszłość. Relatywistyczność opisu prowadzi także do konkluzji, że wszelkie materialne oddziaływania we wszechświecie rozchodzą się z prędkością nie większą niżeli prędkość światła c.

Aby opisać fizykę relatywistyczną traktujemy geometrycznie czas i przestrzeń jako składowe czterowektora położenia

$$X_\mu = (X_i, X_0 = ct) \tag{15}$$

Podobnie opisujemy pęd p_i i energię E - tworzą one czterowektor pędu

$$p_\mu = \left(p_i, p_0 = \frac{E}{c}\right) \tag{16}$$

Możemy analogicznie do wzorów (7) wprowadzić przekształcenia Lorentza które mieszają pęd i energię. Odpowiednikiem wzoru (14) w przestrzeni pędów jest definicja relatywistycznej masy spoczynkowej m_0:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 = -m_0^2\, c^2 \tag{17}$$

W układzie spoczynkowym ($p_1 = p_2 = p_3 = 0$) otrzymujemy ze wzoru (17)

$$p_0^2 = m_0^2\, c^2 \Rightarrow E^2 = m_0^2 c^4 \Rightarrow E = m_0 c^2 \tag{18}$$

Wzór (18) to znana ikona fizyki relatywistycznej - równoważność energii i masy, której słuszność potwierdza m.in. wybuch bomby atomowej.

Należy dodać, że z podanej wyżej definicji relatywistycznego czteropędu wynikają relatywistyczne zasady dodawania energii i pędu. Znajdują one potwierdzenie doświadczalne w akceleratorach wysokich energii, przy opisie kinetycznym procesów zderzeń i rozpraszań cząstek elementarnych.

3. Ogólna teoria względności jako dynamiczna teoria czasoprzestrzeni

Einstein jest ojcem dwóch rewolucji naukowych - specjalnej teorii względności (1905) oraz ogólnej teorii względności (1915). Podstawowa idea ogólnej teorii względności to podanie związku pomiędzy geometrią przestrzeni oraz obecnością w niej materii (nie znikającej gęstości energii i pędu).

Gęstość energii $T_{00}(x_i, t)$ opisuje w chwili t energię $E(V; t]$ w dowolnym obszarze przestrzennym V przy pomocy wzoru z całkowaniem po objętości V

$$E[V, t] = \int\limits_V d^3\vec{x}\, T_{00}(\vec{x}, t) \tag{19}$$

Gęstość energii i pędu w dowolnym układzie Lorentza jest opisana tenzorem energii-pędu $T_{\mu\nu}(x)$, a mianowicie

$$T_{\mu\nu}(x) = \Big(\underset{\substack{\text{3 czterowektory} \\ \text{gęstość pędów } p_i}}{\underset{\uparrow}{T_{\mu i}(x),}} \quad \underset{\substack{\text{czterowektor} \\ \text{gęstość energii}}}{\underset{\uparrow}{T_{\mu 0}(x)}} \Big) \tag{20}$$

Podstawowe równanie ogólnej teorii względności - równanie Einsteina - zapisuje matematycznie obserwację, że zakrzywienie (lokalne) czasoprzestrzeni jest zadane przez źródła materii, opisane tenzorem (20). Uogólniając wzór (14) dla infinitezymalnych odległości ($X_\mu \to dX_\mu$)

$$s^2 \longrightarrow ds^2 = g^{\mu\nu}(x)\, dX_\mu\, dX_\nu \tag{21}$$

dla opisania w ogólnej teorii względności niezmienniczej infinitezymalnej odległości wprowadzamy lokalne pole metryczne $g_{\mu\nu}(x)$, nazwane polem grawitacyjnym. Równania Einsteina determinują pole $g_{\mu\nu}(x)$ (geometrię) przez rozkład czasoprzestrzenny gęstości materii, zadany tenzorem $T_{\mu\nu}(x)$. Równania Einsteina są opisane matematycznie następująco

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R(x) \sim T_{\mu\nu}(x) \tag{22}$$

gdzie wielkości $R_{\mu\nu}$ (tenzor krzywizny Ricci) i R (krzywizna skalarna) są zdefiniowane jednoznacznie przy pomocy pola $g_{\mu\nu}$. Równanie (22) oznacza, że geometria, opisana polem metrycznym $g_{\mu\nu}$, jest zadana przez źródła materii.

Równania (22) mają bardzo szczególne własności: są one takie same we wszystkich układach połączonych dowolną nieliniową transformacją współrzędnych.

$$X'_\mu = X_\mu + f_\mu(x) \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{23}$$

gdzie f_μ opisują cztery dowolne funkcje. Niezmienniczość względem przekształceń (23) to podstawowy postulat ogólnej teorii względności.

Przekształcenia (23) opisują dowolne ruchy niejednostajne (przyspieszone) w czteroprzestrzeni, o różnych przyspieszeniach w różnych punktach czasoprzestrzeni. Okazuje się, że zasada równoważności w specjalnej teorii względności dotycząca układów czasoprzestrzennych powiązanych przekształceniami Poincaré może zostać uogólniona na przekształcenia (23) pod warunkiem, że wprowadzimy pole grawitacyjne $g_{\mu\nu}$, którego zmiany są tak dobrane by zasada równoważności opisu zachodziła także dla zakrzywionych czasoprzestrzeni, powiązanych przekształceniem (23). Nazywamy takie pole grawitacyjne $g_{\mu\nu}$ polem kompensującym, gdyż kompensuje ono siły inercyjne pojawiające się przy ruchach niejednorodnych (z nieznikającym przyspieszeniem).

Dobrym fizycznym przykładem jest ruch w przyspieszającej windzie - okazuje się wtedy, że odczuwamy wewnątrz windy zmianę przyciągania ziemskiego, a zmiana ta może być traktowana jako wynik pojawienia się sił inercyjnych.

Reasumując ogólna teoria względności proponuje specjalny opis geometryczny czasoprzestrzeni w obecności źródeł materii który jest niezależny od lokalnego wyboru układu współrzędnych (patrz wzór (23)).

Pozostaje jeszcze pytanie o naturę fizyczną pola grawitacyjnego. Okazuje się, że ma ono także - podobnie jak np. pole elektromagnetyczne - swoją energię i pęd! Można udowodnić, że pole grawitacyjne opisuje również pewien rodzaj materii - geometryczną materię polową. Możemy przeto podzielić materię na geometryczną, zadającą geometrię, oraz niegeometryczną, opisaną źródłami materii (patrz prawa strona równania Einsteina (22)). To postrzeżenie stało się impulsem do dalszego rozwoju teorii oddziaływań fundamentalnych. Zostało postawione pytanie: czy tylko pole grawitacyjne może opisywać materię geometryczną?

4. Dodatkowe wymiary i pełna geometryzacja oddziaływań

Zapiszmy schemat ideowy czterowymiarowego rónania Einsteina w ogólnej teorii względności następująco:

geometria zadana polem grawitacyjnym (materia geometryczna)	$\simeq$	źródła opisujące rozkład materii niegrawitacyjnej (materia niegeometryczna)

Okazuje się jednak, że pole grawitacyjne i pole elektromagnetyczne mają wiele ze sobą wspólnego - wzory na statyczne oddziaływanie ładunków elektrycznych (prawo Coulomba) i mas (prawo Newtona) są identyczne! Już w kilka lat po ogłoszeniu ogólnej teorii względności Kaluza (1921) oraz Klein (1925) zaproponowali by włączyć pole elektromagnetyczne do materii geometrycznej. By uzyskać ten cel zaproponowali oni ogólną teorię względności w pięciu wymiarach ($D = 5$) i wprowadzili tenzor metryczny dla pola grawitacyjnego $g_{AB}(x_\mu, y)$ w D=5. Opisuje on obok oddziaływania grawitacyjnego także elektromagnetyczne

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & , & A_\mu \\ A_\mu & , & \phi \end{pmatrix} \tag{24}$$

gdzie A_μ to czteropotencjał pola elektromagnetycznego natomiast ϕ jest dodatkowym polem skalarnym, tzw. skalarem Bransa-Dicke. Otrzymujemy następującą równoważność

$$\begin{array}{c} \text{D=5} \\ \text{pole grawitacyjne} \end{array} \quad \simeq \quad \begin{array}{l} \text{D=4 pola grawitacyjne} \\ + \text{ D=4 pole elektromagnetyczne} \\ + \text{ D=4 pole skalarne} \end{array} \tag{25}$$

W szczególności

$$\begin{array}{c} \text{krzywizna} \\ \text{w piątym wymiarze} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{natężenie D=4} \\ \text{pola elektromagnetycznego} \end{array} \tag{26}$$

W ten sposób rozpoczął się program unifikacji geometrycznej w ramach teorii oddziaływań fundamentalnych. Zapytano następnie czy nie można by zgeometryzować inne źródła materii. Obecnie odpowiedź jest w pełni pozytywna - okazuje się, że można przedstawić każdy rodzaj materii jako materię geometryczną. Do spełnienia powyższego programu były konieczne dwa ważne odkrycia:

i) Od lat dwudziestych i trzydziestych XX w. stawało się coraz bardziej powszechnym przekonanie, że uniwersalnym językiem opisującym materię w mikroświecie są pola - klasyczne i kwantowe. Ważnym krokiem na tej drodze był opis przez P.A.M. Diraca (1926) elektronów i pozytonów - cząstek z masą, spinem i ładunkiem elektrycznym - przy pomocy teorio-polowego równania Diraca. Następnym krokiem, w latach trzydziestych, było opisanie przez Yukawę przy pomocy teorii pola mezonów π. Następnie okazało się, że opis teorio-polowy może być dwojakiego typu: dla cząstek o spinie całkowitym (bozony) i połówkowym (fermiony). W tym celu należy wprowadzić

– pola tenzorowe opisujące bozony (mezony, fotony, grawitony, etc.)

– pola spinorowe opisujące fermiony (elektrony, protony, kwarki, etc.)

Okazało się, że każdy rodzaj elementarnej materii ma swój odpowiednik w opisie teorio-polowym

ii) Drugi krok potrzebny do pełnej geometryzacji został dokonany na gruncie matematyki, w szczególności geometrii. Okazało się, że standardowe geometrie pozwalają jedynie na geometryzację materii bozonowej opisanej polami tenzorowymi. By zgeometryzować pola fermionowe należało wprowadzić uogólnienie geometrii, zwane supergeometrią (Berezin 1970). Jedynie w superprzestrzeni - rozmaitości geometrycznej rozważanej przez supergeometrię - można opisywać jako geometryczne także pola fermionowe. Ponadto wprowadzenie supergeometrii prowadzi do istnienia nowych uogólnionych symetrii - tzw. supersymetrii (Haag, Łopuszański, Sohnius, 1994). W standardowym opisie geometrycznym możemy badać tylko symetrie przekształcające bozony w bozony oraz fermiony w fermiony. Przy przekształceniach supersymetrii okazuje się, że możemy mieszać ze sobą bozony i fermiony - w ten sposób układy fizyczne bozonowe i fermionowe są powiązane supersymetrią i przestają być od siebie całkowicie niezależne. Co więcej, do każdej teorii bozonowej możemy dodać jej odpowiednik fermionowy, by razem tworzyły teorię supersymetryczną, niezmienniczą względem przekształceń supersymetrii.

W szczególności w latach siedemdziesiątych (Ferrara, Friedman, van Nieuvenhuizen, 1976) zsupersymetryzowano ogólną teorię względności Einsteina. Okazało się, że do opisu nowej supergeometrii jest potrzebne nowe pole spinorowe, pole grawitonowe $\psi_{\mu\alpha}(x)$ (α - indeks spinorowy), a teoria dynamiczna opisana przez parę pól $(g_{\mu\nu}(x), \psi_{\mu\alpha}(x))$ nosi nazwę supergrawitacji. Mając narzędzie supergrawitacji już w latach osiemdziesiątych powstała pierwsza próba pełnej geometryzacji wszystkich (tak bozonowych jak i fermionowych) pól potrzebnych do opisu świata cząstek elementarnych. Została ona wprowadzona w 11-tu wymiarach, a więc obok czterech wymiarów czasoprzestrzennych teoria ta wprowadza siedem wymiarów tzw. wewnętrznych. Zapostulowano, że równanie świata to równanie D=11 supergrawitacji, z całą materią we Wszechświecie opisaną jedynie polami jedenastowymiarowej supergrawitacji, bez jedenastowymiarowych źródeł materii. Otrzymujemy

$$\begin{array}{c}\text{Zsupersymetryzowane równanie Einsteina}\\ \text{w D=11}\\ \text{(D=11 supergrawitacja)}\end{array} \quad \simeq \quad 0 \tag{27}$$

W takim sformułowaniu ponieważ nie ma źródeł materii, wszystkie rodzaje materii są geometryczne.

Równanie (28) opisujące całokształt mikroświata zostało nazwane "Teorią Wszystkiego" (Hawking 1982). Okazuje się, że była to pierwsza "Teoria Wszystkiego" - napotkano jednak problemy przy kwantowaniu takiej teorii i zaproponowano wkrótce jako drugą "Teorię Wszystkiego" superstrunę dziesięciowymiarową (Green, Schwarz, 1984).

5. Kwantowanie przestrzeni i czasu

W poprzednich rozdziałach zastanawialiśmy się nad teorią oddziaływań fundamentalnych w wersji klasycznej. Okazuje się jednak, że każda fizyczna teoria opisująca oddziaływania fundamentalne ma także drugą wersję, kwantową. Przykładem może być mechanika kwantowa, która wprowadza kwantowe reguły do formalizmu mechaniki cząstek punktowych. Podstawową charakterystyką opisu kwantowego jest zamiana liczb opisujących wielkości fizyczne przez operatory. W szczególności położenia $\widehat{X_i}$ i pędy $\widehat{P_i}$ cząstki kwantowej nie komutują ze sobą, są opisane podstawową relacją Heisenberga:

$$\widehat{X}_i\widehat{P}_j - \widehat{P}_j\widehat{X}_i = i\hbar\,\delta_{ij} \tag{28}$$

gdzie $\hbar$ jest stałą Plancka a symbol δ_{ij} ("delta Kroneckera") jest zadany relacjami.

$$\delta_{ij} = 1 \quad i = j \qquad \delta_{ij} = 0 \quad i \neq j \tag{29}$$

Interpretacja fizyczna nieprzemienności jest wyrażona przez zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Jeżeli wprowadzimy wielkości

ΔX_i	–	miara dokładności pomiaru X_i
ΔP_i	–	miara dokładności pomiaru P_i

to konsekwencją relacji (29) jest następująca nierówność:

$$\Delta X_i\,\Delta P_i \geq \hbar \tag{30}$$

Z relacji (29), która opisuje zasadę nieoznaczoności Heisenberga (1924) wynika, że im dokładniej zmierzymy położenie, tym mniej precyzyjnie możemy ustalić pęd - i vice versa. Jeżeli zapytamy o dokładność pomiaru położenia w dwóch różnych kierunkach, w teorii w której grawitacja nie jest skwantowana otrzymamy

$$\Delta X_i\,\Delta X_j \geq 0 \tag{31}$$

czyli możemy mierzyć położenia w dwóch nierównoległych kierunkach z dowolną dokładnością. Okazuje się jednak, że relacja (31) przestaje być słuszna, gdy mierzymy położenie cząstki kwantowej poruszającej się w kwantowym polu grawitacyjnym. Wtedy można udowodnić (Doplicher, Fredenhagen, Roberts 1995), że relacja (30) powinna być zastąpiona przez następujący wzór

$$\Delta X_i\,\Delta X_j \geq \ell_p^2 \tag{32}$$

gdzie $\ell \simeq 10^{-33}$cm określa tzw. odległość Plancka. Formuła (31) oznacza, że nie możemy mierzyć położenia wzdłuż dwóch różnych kierunków przestrzeni z dowolną dokładnością, a położenia $\widehat{X_i}$ są nieprzemienne. W fizyce relatywistycznej, gdy używamy czterech współrzędnych czasoprzestrzeni można zapisać relację (31) następująco

$$\Delta X_\mu\,\Delta X_\nu \geq \ell_p^2\,\theta_{\mu\nu} \tag{33}$$

gdzie $\theta_{\mu\nu}$ jest pewnym stałym antysymetrycznym tenzorem określającym strukturę nieprzemienności. Z relacji (31) wynikają następujące dwa ważne wnioski:

i) W rezultacie nałożenia się w kwantowej grawitacji struktury teorii kwantowej na równania Einsteina nie można mierzyć odległości z dokładnością większą niżeli odległość Plancka ℓ_p.

ii) Podobnie gdy chcemy mierzyć równocześnie czas i położenie, dokładność obu pomiarów jest ograniczona relacją (32).

Powyższe rezultaty możemy fenomenologicznie zcharakteryzować następująco:

- czasoprzestrzeń klasyczna jest ciągła, ze współrzędnymi opisanymi przez dowolne liczby rzeczywiste
- czasoprzestrzeń kwantowa to przestrzeń dyskretna, nieciągła, w której lokalizacja może być tylko dokonana z dokładnością zadaną długością Plancka ℓ_p. Efektywnie przy pomiarze kwantowym punkty czasoprzestrzeni są zamienione przez "elementarne komórki" o rozmiarze boku równym ℓ_p.

Wydaje się, że właściwy opis kwantowej grawitacji powinien się opierać na nieprzemiennych czasoprzestrzeniach kwantowych, lecz taki formalizm geometryczny w dużej mierze jest jeszcze nie zrealizowany.

6. Czasoprzestrzenie złożone

Obok nieprzemiennych współrzędnych czasoprzestrzeni inną niestandardową ideą w fizyce teoretycznej jest wprowadzenie czasoprzestrzeni złożonej. W tym podejściu można zauważyć analogię z modelem kwarkowym cząstek elementarnych. Od lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku silnie oddziałujące cząstki elementarne (tzw. hadrony) są opisane przez iloczyny pól kwarkowych (Gell-Mann, 1964)

$$\underbrace{Q, \bar{Q}}_{\text{kwarki}} \longrightarrow \begin{array}{c} Q\overline{Q} \\ QQQ \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{cząstki elementarne} \\ \text{(hadrony złożone z kwarków)} \end{array} \tag{34}$$

Pola kwarkowe są polami spinorowymi. Przez analogię z kwarkami można wprowadzić nowe elementarne współrzędne geometryczne, opisane spinorami

Lorentza ($i = 1, 2$) oraz wprowadzić złożoną czasoprzestrzeń

$$\underbrace{Z_i \equiv (Z_1, Z_2)}_{\substack{\text{współrzędne} \\ \text{spinorowe}}} \quad \longrightarrow \quad X_\mu = \overline{Z}_i (\sigma_\mu)^{ij} \ Z_j \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{złożone współrzędne} \\ \text{czasoprzestrzeni} \end{array} \quad (35)$$

gdzie $\sigma_\mu = (\sigma_0 = 1_2, \sigma_i)$ $i = 1, 2, 3$, to macierze dwuwymiarowe, tzw. macierze Pauliego:

Idea przestrzeni spinorowej jako geometrii fundamentalnej w fizyce była lansowana w latach pięćdziesiątych przez nestora fizyków wrocławskich, Jana Rzewuskiego (1916-1994). W podejściu Rzewuskiego podstawowa dynamika opisująca struktury fizyczne jest opisana w przestrzeni spinorowej, następnie jest ona tłumaczona na teorię w złożonej czasoprzestrzeni, którą możemy powiązać z eksperymentem. W teorii Rzewuskiego przestrzeń jednospinorowa rozpięta na dwóch współrzędnych zespolonych pozwalała jedynie na wprowadzenie złożonych współrzędnych X_μ leżących na stożku świetlnym ($X_\mu X^\mu = 0$). Aby opisać dowolny punkt czasoprzestrzeni, na stożku i poza nim, trzeba było wprowadzić przestrzeń dwu-spinorową.

Pary spinorów Lorentza realizują reprezentacje tzw. symetrii konforemnej, 15-parametrowego rozszerzenia symetrii Poincaré. Fundamentalne spinory grupy konforemnej zostały nazwane twistorami. Teoria fundamentalnej geometrii spinorowej w oparciu o współrzędne twistorowe i symetrię konforemną została podana w latach sześćdziesiątych XX w. przez Rogera Penrosa, matematyka i filozofa przyrody z Oxfordu. To jego teoria intensywnie rozwijana w ciągu ostatnich czterdziestu latach jest obecnie uważana za najpoważniejszą alternatywę do konwencjonalnego opisu czasoprzestrzeni. Teza, że całą fizykę teoretyczną można zapisać w języku geometrii spinorowej była przyjmowana w latach siedemdziesiątych z dużym optymizmem; okazało się jednak wkrótce, że są poważne problemy z opisem twistorowym teorii grawitacji Einsteina. Ostatnio, w ciągu ostatnich kilku lat teoria Penrosa wydaje się znowu wzbudzać coraz większe zainteresowanie. Okazuje się, że nowe idee w teorii oddziaływań fundamentalnych - supersymetrie i teoria superstrun - zawierają elementy które faworyzują ideę geometrii twistorowej i złożoną strukturę współrzędnych czasoprzestrzeni. W szczególności okazuje się, że nawet w 11-tu wymiarach przy opisie tzw. M-teorii, trzeciej i aktualnej propozycji tzw. "Teorii Wszystkiego" można przypisać ważną rolę jedenastowymiarowym odpowiednikom supersymetrycznych twistorów, obiektom, które posiadają 64 składowe (Bandos, de Azcarraga, Izquierdo, Lukierski 2001).

7. Uwagi końcowe

W powyższej prezentacji zostały przedstawione trzy główne idee rozszerzenia czterowymiarowego opisu czasoprzestrzennego, które stanowią podstawę geometryczną współczesnych uogólnień teorii oddziaływań fundamentalnych:

a) Wprowadzamy dodatkowe współrzędne, poprzez propozycję rozszerzonych czasoprzestrzeni wielowymiarowych (wymiar D większy niżeli 4)

$$\begin{array}{ccc} X_\mu & \longrightarrow & (X_\mu, Y_k) \qquad k = 1, 2, \ldots D-4 \\ \text{czasoprzestrzeń} & & \text{rozszerzona} \\ \text{Einsteina} & & \text{czasoprzestrzeń} \end{array} \tag{36}$$

Współrzędne dodatkowe w teoriach supersymetrycznych mogą być także opisane przez współrzędne antyprzemienne, które tworzą algebrę Grassmanna.

b) Zamieniamy liczbowe współrzędne czasoprzestrzeni przez nieprzemienne współrzędne operatorowe

$$\begin{array}{ccc} X_\mu & \longrightarrow & \widehat{X}_\mu \\ \text{czasoprzestrzeń} & & \text{czasoprzestrzeń} \\ \text{klasyczna} & & \text{kwantowa} \end{array} \tag{37}$$

Taka zamiana współrzędnych pojawia się w teoriach fizycznych w rezultacie kwantowania dynamiki czasoprzestrzeni opisanej ogólną teorią względności.

c) Wprowadzamy jako elementarne zmienne geometryczne spinory, a współrzędne czasoprzestrzenne traktujemy jako złożone. Ten kierunek rozumowania, propagowany w Polsce przez J. Rzewuskiego, a na świecie przez R. Penrosa, jest rewolucyjny w swoich konsekwencjach i wymaga przepisania wielu podręczników fizyki teoretycznej, w których czas i przestrzeń występują jako elementarne pojęcia geometryczne.

Należy jednak podkreślić, że nowe koncepcje czasoprzestrzeni dotyczą opisu świata na bardzo małych odległościach, np. porównywalnych z długością Plancka ℓ_p, i nie zagrażają teorii dotyczących codziennego oglądu naszego świata fizycznego. Te nowe koncepcje są w dużej mierze konstruktami teoretycznymi, pomocnymi przy odpowiedzi na hipotetyczne pytanie jak wyglądają najbardziej elementarne prawa mikroświata, które unifikują różne efekty dynamiczne (elektromagnetyczne, grawitacyjne, jądrowe) w jedną konsystentną całość matematyczną.

Wrocław, czerwiec 2007