

# Modelowanie Fizyczne w Animacji Komputerowej

Wykład 2

**Dynamika Bryły Sztywnej  
Animacja w Blenderze**



Maciej Matyka

<http://panoramix.ift.uni.wroc.pl/~maq/>

# Rigid Body Dynamics



[https://youtu.be/\\_E70UsvrjRA](https://youtu.be/_E70UsvrjRA)

**Kompilacja1.mp4**

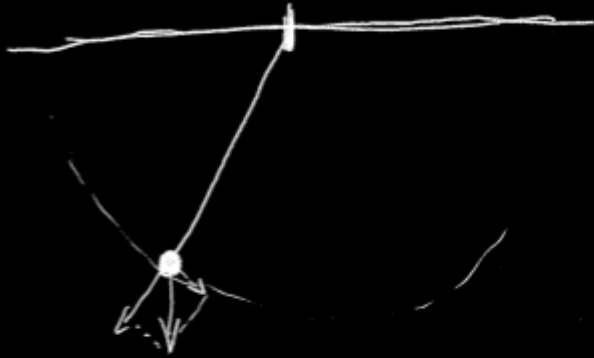
# Bryła Sztywna



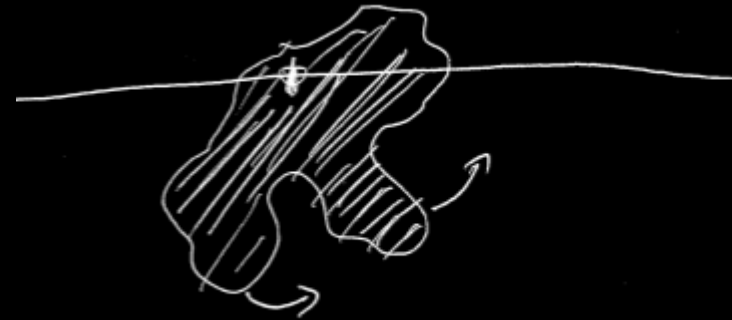
# Bryła Sztywna

- Posiada objętość (nie jest to punkt)
- Nie podlega odkształceniom
- Stan obiektu opisuje się w całości, nie dla jego poszczególnych części
- Równania ruchu bardziej skomplikowane niż dla punktów

# Wahadła



matematyczne



fizyczne

# Przesunięcie bryły

- **Środek masy** – posiada pozycję  $x$  i prędkość  $v$
- Przesunięcie ciała zachodzi podobnie jak w **punkcie materialnym**

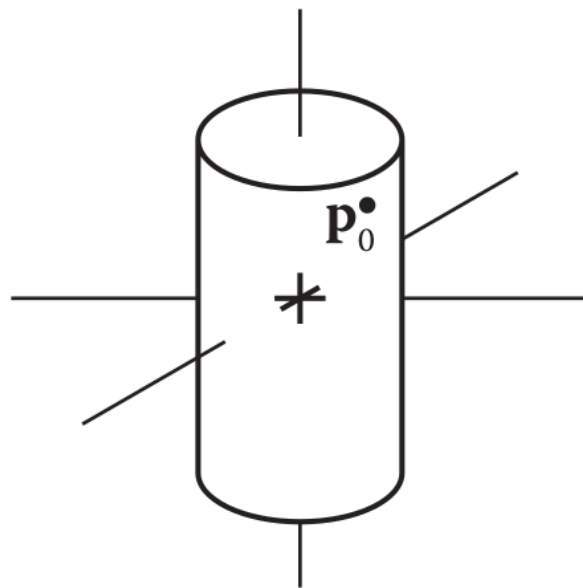
# Obrót bryły

- Orientacja – obrót wokół środka masy
- Różny opis orientacji (np. kwaterniony)
- Na początek opis macierzowy obrotów

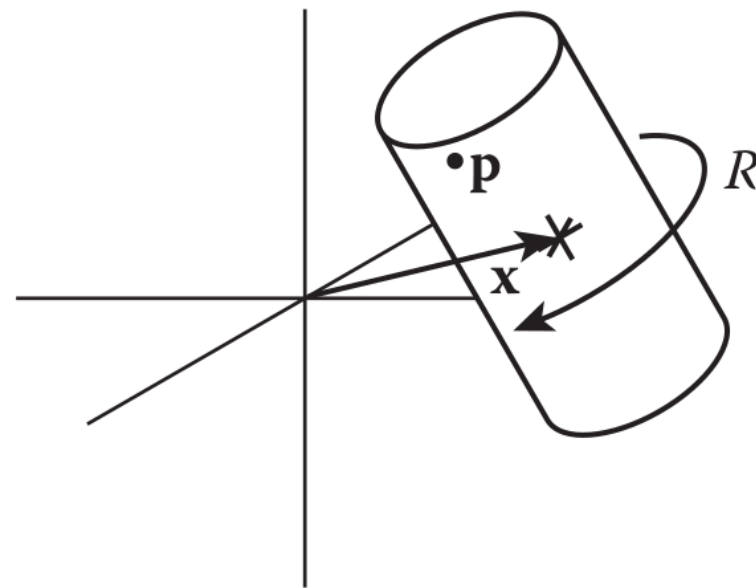
# Obrót bryły

- Transformacja punktu z **lokalnego** układu odniesienia do układu świata (world coordinate system)

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} + R\mathbf{p}_0$$



Body coordinates



World coordinates



# Opis ruchu bryły

- Różniczkujemy równanie po czasie

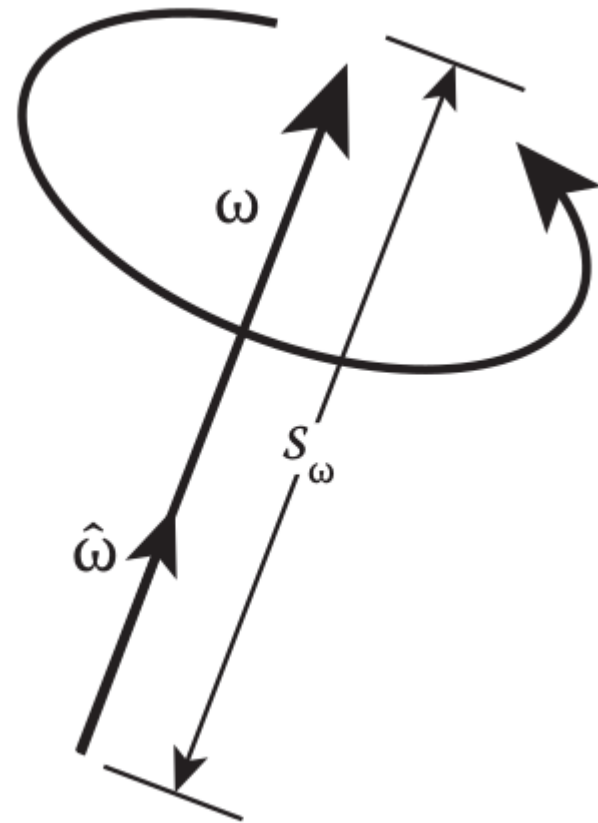
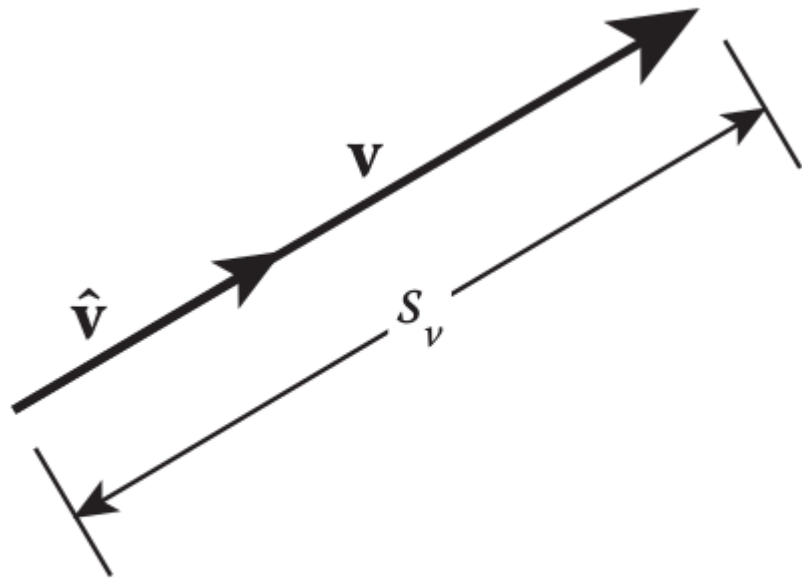
$$\mathbf{p} = \mathbf{x} + R\mathbf{p}_0$$

- I dostajemy:

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{x}} + \cancel{R\dot{\mathbf{p}}_0} + \dot{R}\mathbf{p}_0$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} + \dot{R}\mathbf{p}_0$$

# Prędkość kąтова $\omega$



( $S_v$ ,  $S_w$  – długości wektorów)

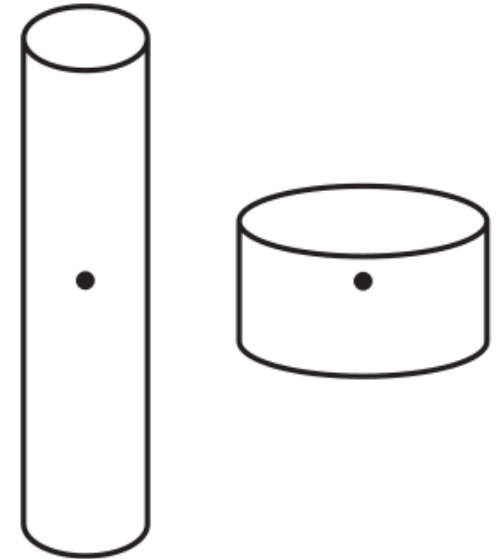
# Moment bezwładności

- Pęd w ruchu liniowym:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}$$

- Pęd w ruchu obrotowym:

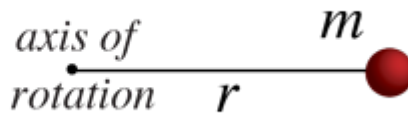
$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$



- $I$  jest momentem bezwładności (tensor)

# Dla punktu

- Moment bezwładności dla masy na ramieniu o długości  $r$

$$I = mr^2$$


The diagram shows a horizontal line representing the arm of length  $r$ , starting from a point labeled "axis of rotation" and ending at a red sphere labeled  $m$ .

# Moment bezwładności

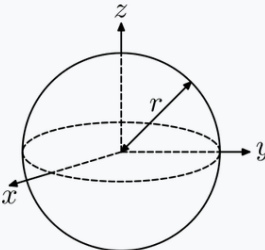
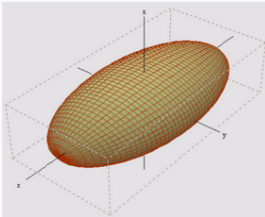
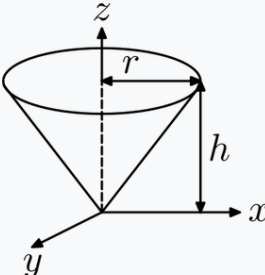


<https://www.youtube.com/watch?v=FmnkQ2ytIO8>

Angular Momentum V2\_ Physics Concept Trailer™ [720p].mp4

# Moment bezwładności I

- tensor (macierz 3x3)
- opisuje rozkład masy w bryle

<p>Hollow sphere of radius <math>r</math> and mass <math>m</math></p>		$I = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mr^2 \end{bmatrix}$
<p>Solid ellipsoid of semi-axes <math>a</math>, <math>b</math>, <math>c</math> and mass <math>m</math></p>		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$
<p>Right circular cone with radius <math>r</math>, height <math>h</math> and mass <math>m</math>, about the apex</p>		$I = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mr^2 \end{bmatrix}$

# Ruch liniowy i obrotowy

---

## Linear

Mass:  $m$

Position:  $\mathbf{x}$

Velocity:  $\mathbf{v}$

Momentum:  $\mathbf{P}$

## Angular

Moment of Inertia:  $I$

Orientation:  $R$

Velocity:  $\boldsymbol{\omega}$

Momentum:  $\mathbf{L}$

---

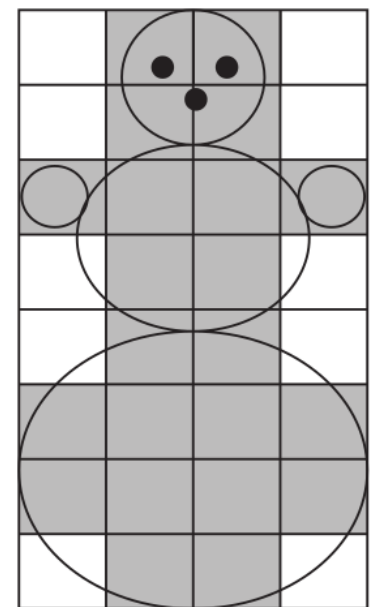
# Symulacja Bryły Sztywnej 1

- Pozycja środka masy dla obiektu złożonego z punktów:

$$\mathbf{c} = \frac{\sum m_i \mathbf{x}_i}{\sum m_i}$$

- Dla obiektu w zastosowaniach graficznych można użyć np. voxelizacji:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{n} \sum \mathbf{x}_i$$





# Symulacja Bryły Sztywnej 2

- Moment bezwładności - definicja

$$I = \begin{bmatrix} \int_V (\mathbf{x}_y^2 + \mathbf{x}_z^2) \rho(\mathbf{x}) dV & - \int_V (\mathbf{x}_x \mathbf{x}_y) \rho(\mathbf{x}) dV & - \int_V (\mathbf{x}_x \mathbf{x}_z) \rho(\mathbf{x}) dV \\ - \int_V (\mathbf{x}_x \mathbf{x}_y) \rho(\mathbf{x}) dV & \int_V (\mathbf{x}_x^2 + \mathbf{x}_z^2) \rho(\mathbf{x}) dV & - \int_V (\mathbf{x}_y \mathbf{x}_z) \rho(\mathbf{x}) dV \\ - \int_V (\mathbf{x}_x \mathbf{x}_z) \rho(\mathbf{x}) dV & - \int_V (\mathbf{x}_y \mathbf{x}_z) \rho(\mathbf{x}) dV & \int_V (\mathbf{x}_x^2 + \mathbf{x}_y^2) \rho(\mathbf{x}) dV \end{bmatrix}$$

- Dla punktów:

$$I = \begin{bmatrix} \sum (y_i^2 + z_i^2) m_i & - \sum (x_i y_i) m_i & - \sum (x_i z_i) m_i \\ - \sum (x_i y_i) m_i & \sum (x_i^2 + z_i^2) m_i & - \sum (y_i z_i) m_i \\ - \sum (x_i z_i) m_i & - \sum (y_i z_i) m_i & \sum (x_i^2 + y_i^2) m_i \end{bmatrix}$$

(Voxelizacja lub bezpośrednio lub wzory analityczne)

# Symulacja Bryły Sztywnej 3

- Momet bezwładności w globalnym układzie odniesienia

$$I = RI_0R^T$$

- Podobnie:

$$I^{-1} = RI_0^{-1}R^T$$

# Symulacja Bryły Sztywnej 4

- Ruch bryły

- Zmiana pędu:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{P}}$

# Symulacja Bryły Sztywnej 5

- Ruch bryły

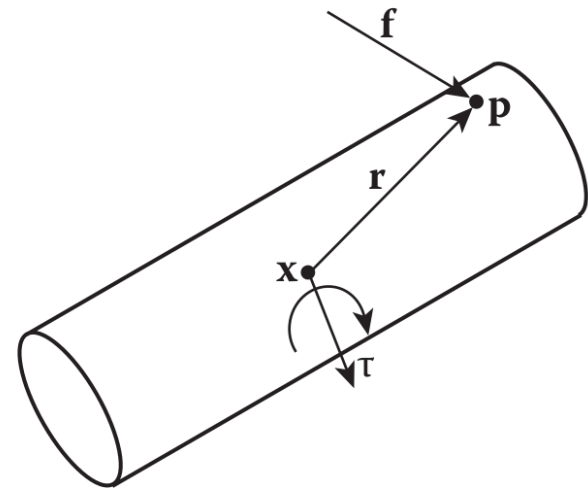
- Zmiana pędu:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{P}}$

- Zmiana momentu pędu:  
(moment obrotowy)

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}$$

- Ramię siły:  $\mathbf{r} = \mathbf{p} - \mathbf{x}$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$



# Symulacja Bryły Sztywnej 6

- Stan bryły (pozycja):

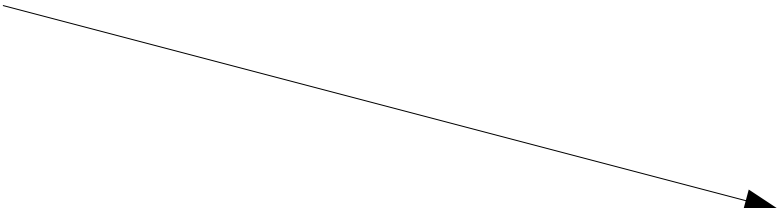
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ R \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}$$

# Symulacja Bryły Sztywnej 7

- Stan bryły (pozycja):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ R \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}$$

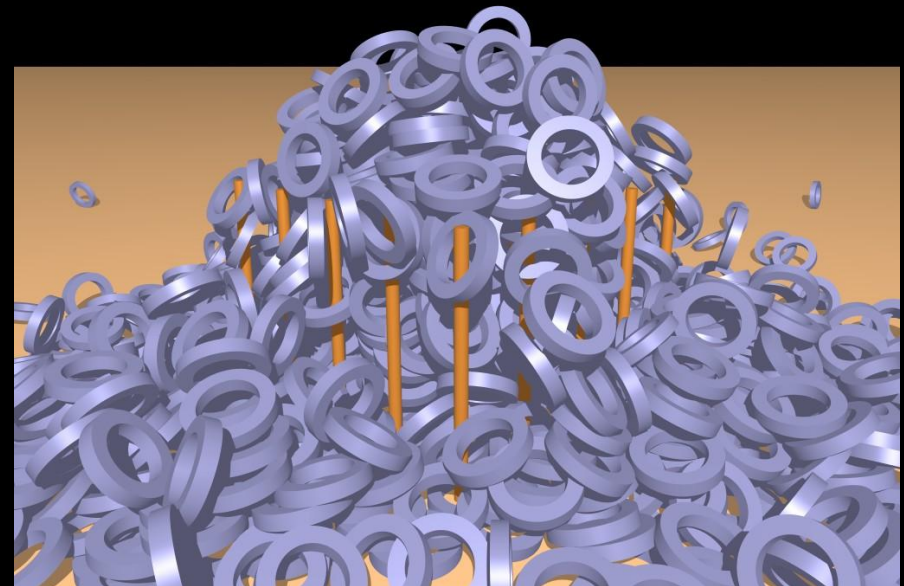
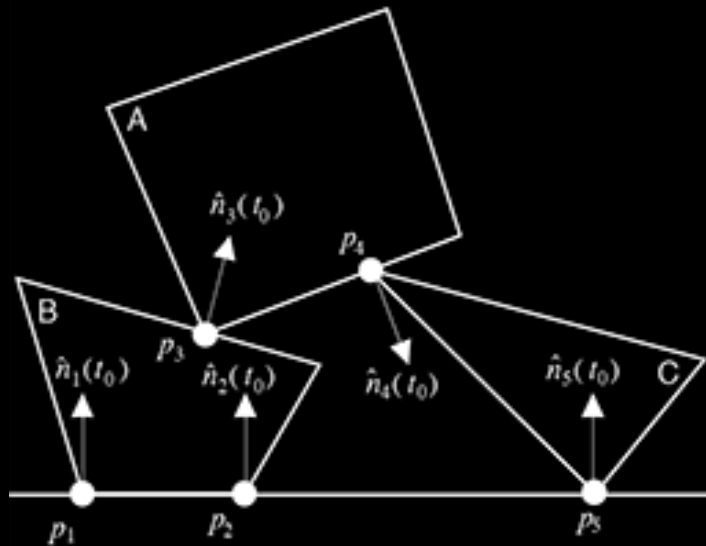
- Zmiana stanu w czasie:

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega^* R \\ \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{m} \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\omega} &= I^{-1} \mathbf{L} \end{aligned}$$


# Symulacja Bryły Sztywnej - podsumowanie

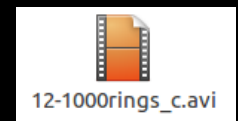
- Stan bryły to **pozycja i orientacja**
- Oprócz prędkości liniowej jest **prędkość kątowna**
- Do opisu bryły oprócz masy potrzebny jest **moment bezwładności**
- Ten reprezentowany jest przez macierz w globalnym układzie odniesienia (transformacja z lokalnego)
- Siły działające na bryłę powodują ruch liniowy i ruch obrotowy

# Symulacja bryły sztywnej



1. Wyznaczenie sił działających na każdą bryłę
2. Przesunięcia (z równań ruchu)

([animacja](#))





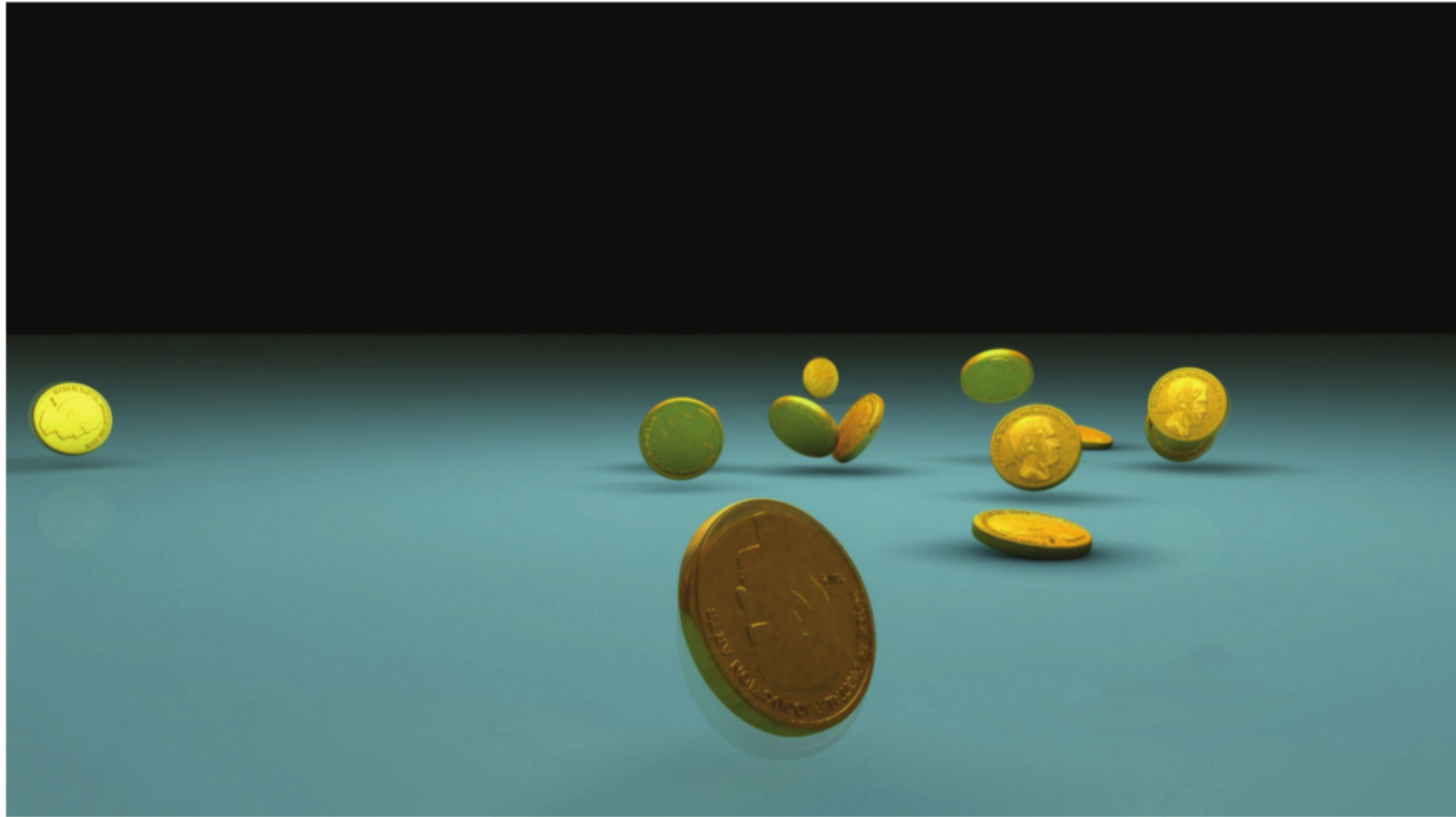


FIGURE 9.1 Coins tossed onto a tabletop. (Courtesy of Zhaoxin Ye.)

# Box2d

- <http://box2d.org>
- biblioteka **C++** do symulacji bryły sztywnej
- Autor: Erin Catto
- Licencja: zlib (wolne oprogramowanie)
- Przykład zastosowania: **Angry Birds** ([animacja](#))



mass - how heavy it is

velocity - how fast and which direction it's moving

rotational inertia - how much effort it takes to start or stop spinning

angular velocity - how fast and which way it's rotating

location - where it is

angle - which way it is facing

```
1  b2BodyDef myBodyDef;  
2  myBodyDef.type = b2_dynamicBody; //this will be a dynamic body  
3  myBodyDef.position.Set(0, 20); //set the starting position  
4  myBodyDef.angle = 0; //set the starting angle
```

```
1  b2Body* dynamicBody = m_world->CreateBody(&myBodyDef);
```

## ZADANIE 2





<https://www.blender.org/>

- Oprogramowanie do grafiki i animacji 3D
- Pluginy do fizyki
- Ciała sztywne, miękkie
- Bardzo dużo tutoriali i silna duża społeczność
- Całkowicie za darmo
- Wsparcie od Python-a
- Windows / Linux

Tools

▼ Transform

User Persp

Translate

Rotate

Scale

Mirror

Relations

▼ Edit

Duplicate

Duplicate Linked

Delete

Join

Set Origin

Animation

Shading:

Smooth Flat

Physics

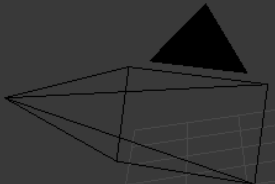
Data Transfer:

Data Data Layo

Grease Pencil

▼ History

Operator



Blender 2.76 b

Hash: unknown  
Branch: unknown

Interaction: Blender

Recent

Recover Last Session

Links

- Donations
- Credits
- Release Log
- Manual
- Blender Website
- Python API Reference

View Search All Scenes

Scene

- RenderLayers
- World
- Camera
- Cube

Scene

▼ Render

Render Animation Audio

Display: Image Editor

▼ Dimensions

Render Presets

Resolution: X: 1920 px Y: 1080 px

Frame Range: Start Fra: 1 End Fra: 250

50% Frame Ste: 1

Aspect Ratio: X: 1.000 Y: 1.000

Frame Rate: 24 fps

Time Remapping: Bo Cr < 10 > 10

✓ Anti-Aliasing

5 8 11 16 Mitchell-Netr... Full Sample SI: 1.000 px

▶ Sampled Motion Blur

▶ Shading

▶ Performance

▶ Post Processing

▶ Metadata

▼ Output

/tmp/

✓ Overwrite ✓ File Extens... Placeholders Cache Result

PNG BW RGB RGBA

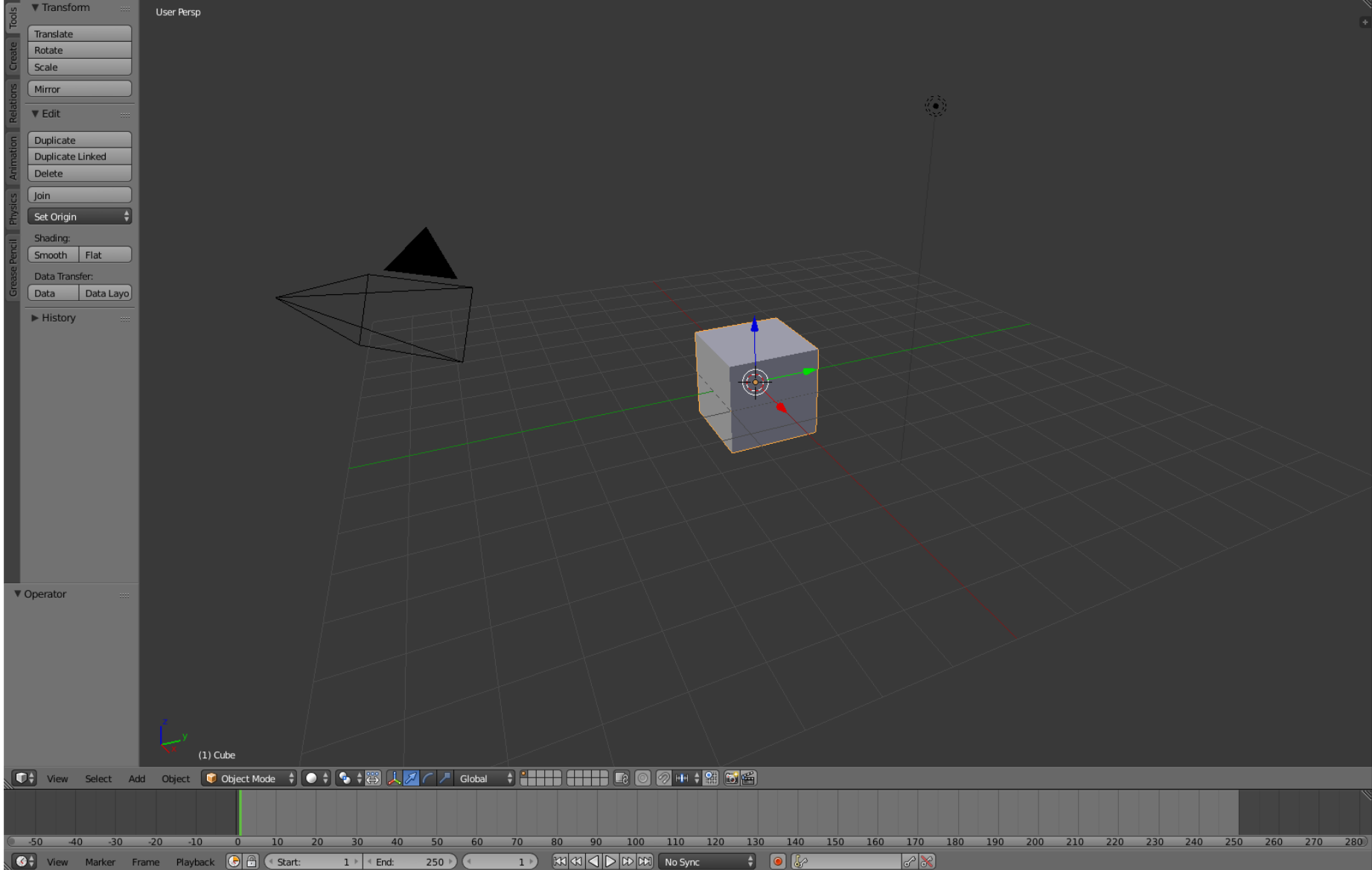
Color De... 8 16

Compression: 15%

View Select Add Object Object Mode Global

Timeline: -50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 210 220 230 240 250 260 270 280

View Marker Frame Playback Start: 1 End: 250 No Sync



View Search All Scenes

- Scene
  - RenderLayers
  - World
  - Camera
  - Cube
  - Lamp

Scene

Render

Render Animation Audio

Display: Image Editor

Dimensions

Render Presets

Resolution: X: 1920 px Y: 1080 px 50% Frame Range: Start Frame: 1 End Frame: 250 Frame Step: 1 Aspect Ratio: X: 1.000 Y: 1.000 Frame Rate: 24 fps Time Remapping: Bord Crop 100 100

Anti-Aliasing

5 8 11 16 Mitchell-Netravalil Full Sample Size: 1.000 px

Sampled Motion Blur

Shading

Performance

Post Processing

Metadata

Output

/tmp/

Overwrite File Extensions Placeholders Cache Result

PNG BW RGB RGBA Color Depth: 8 16 Compression: 15%

Bake

Freestyle

# Tutorial (mogą być inne!)



Źródła: <http://lesterbanks.com/2014/01/introduction-rigid-body-simulator-blender/>  
<https://www.youtube.com/watch?v=XNDO2xvUHtc>



-----

# Isaac Newton (1643-1727)



- Prawa ruchu
- Mechanika klasyczna
- Matematyka
- i wiele innych...