Szereg Taylora – praktycznie

Modelowanie fizyczne w animacji komputerowej

Maciej Matyka

http://panoramix.ift.uni.wroc.pl/~maq/

Plan na kilka wykładów

- Całkowanie → metoda Verlet (testy html5)
- Particle systems + implementacja
- Open Frameworks → wizualizacja

Szereg Taylora – Praktycznie
Metoda Eulera

- Rozwinięcie w szereg Taylora
- Metoda Eulera (punkt)
- Aplikacja w animacji (odbijająca się piłka)

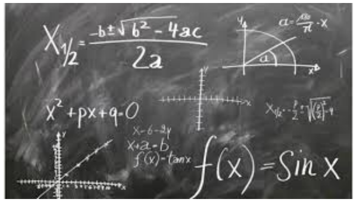
Dalej:

- Metoda MidPoint
- Metoda RK4
- **Metoda Verleta**

Teoria: Szereg Taylora

Wartości funkcji w punkcie x można opisać jako **nieskończony szereg**:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x,a) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + R_n(x,a) \end{aligned},$$



Szereg Taylora dla t=t0+dt

(notatki)

https://medium.com/@maciej.matyka/szereg-taylora-praktycznie-ae2833def0c3

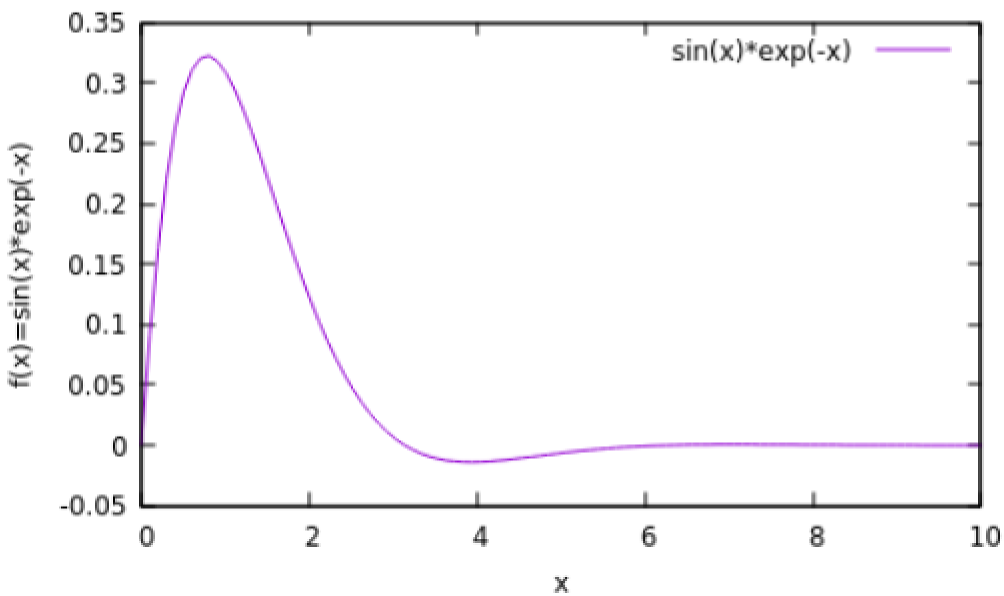
Lub Slajdy

http://mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html

(J. Matulewski, Wolfram)

(wzór 15.2 / str. 308),	t - t0 = dt
(wzór 15.3 / str. 308),	f(t0+dt)=...
(wzór 15.4 / str. 309),	jw.

Przybliżymy teraz funkcję z użyciem szeregu Taylora. Przykładową funkcją niech będzie coś prostego, ale ładnego —na przykład funkcja sinus z wygaszeniem: f(x) = sin(x)*exp(-x)



Funkcja jest narysowana po lewej stronie.

Kolejne pochodne funkcji będą potrzebne do rozwinięcia w szereg. Ograniczymy się do dwóch wyrazów, użyjemy pakietu Mathematica [1,2].

Pierwsza pochodna—f ’(x) = e^(-x) (cos(x)—sin(x))

Druga pochodna—f ”(x) = -2 e^(-x) cos(x)

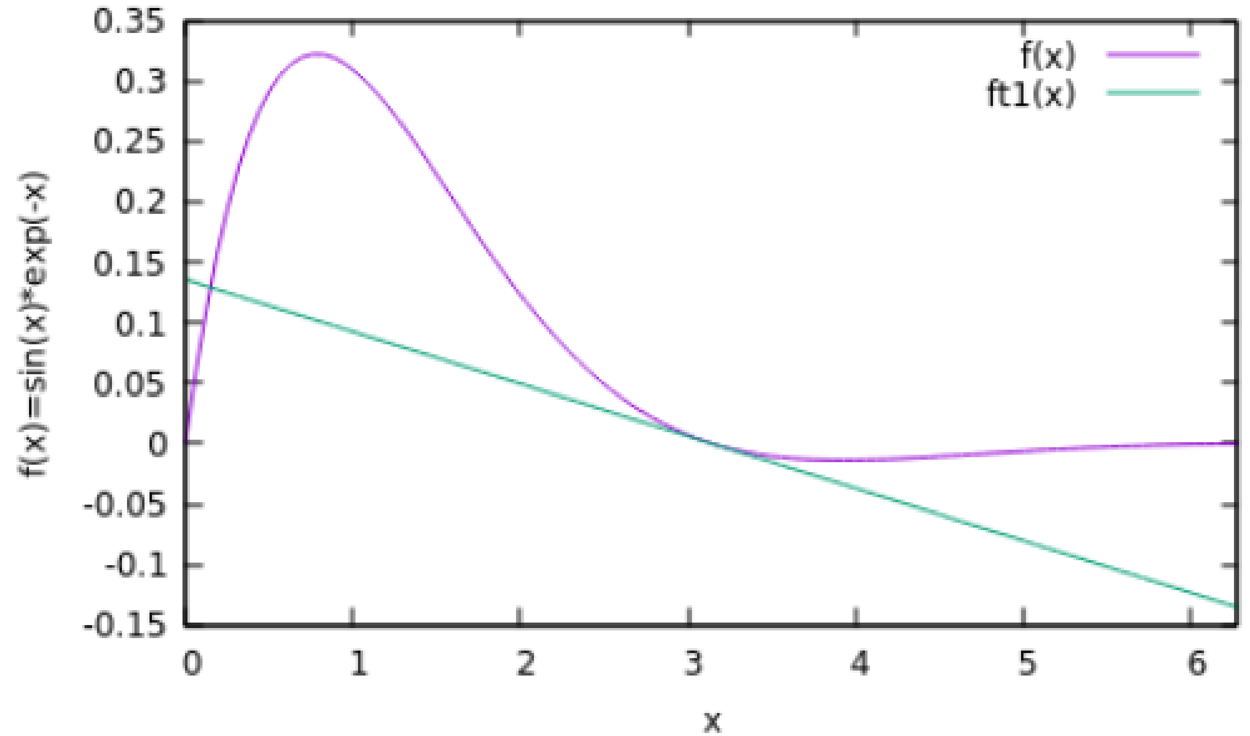
Możemy teraz zapisać **rozwinięcie w szereg wokoło x=π dla jednego wyrazu**:

- ft1(x) = f(pi) + (x-π)*f '(π)

rozwinięcie w szereg wokoło x=π dla dwóch wyrazów

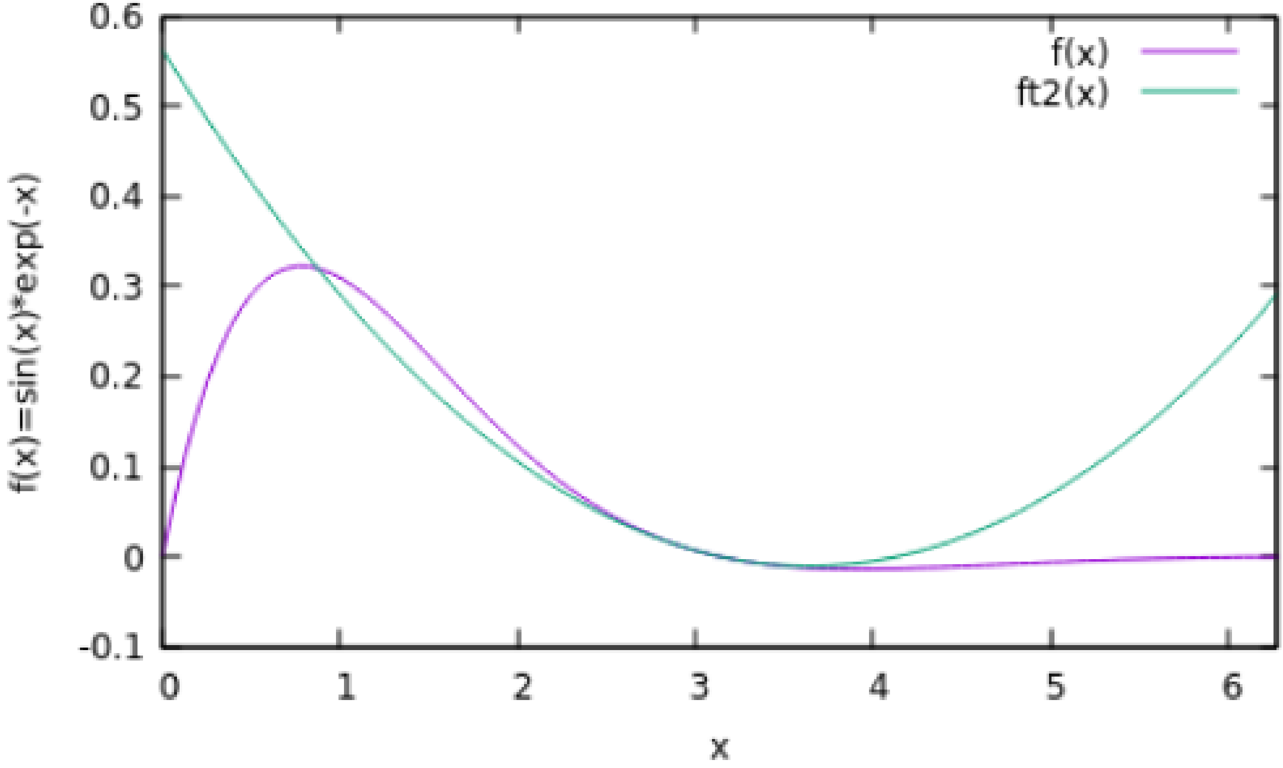
- ft2(x) = f(pi) + (x-π)*f '(π) + $(x-\pi)^2$/2*f ''(π)

Przybliżenie funkcji f(x) szeregiem Taylora wokoło punktu x=π dla jednego wyrazu szeregu.

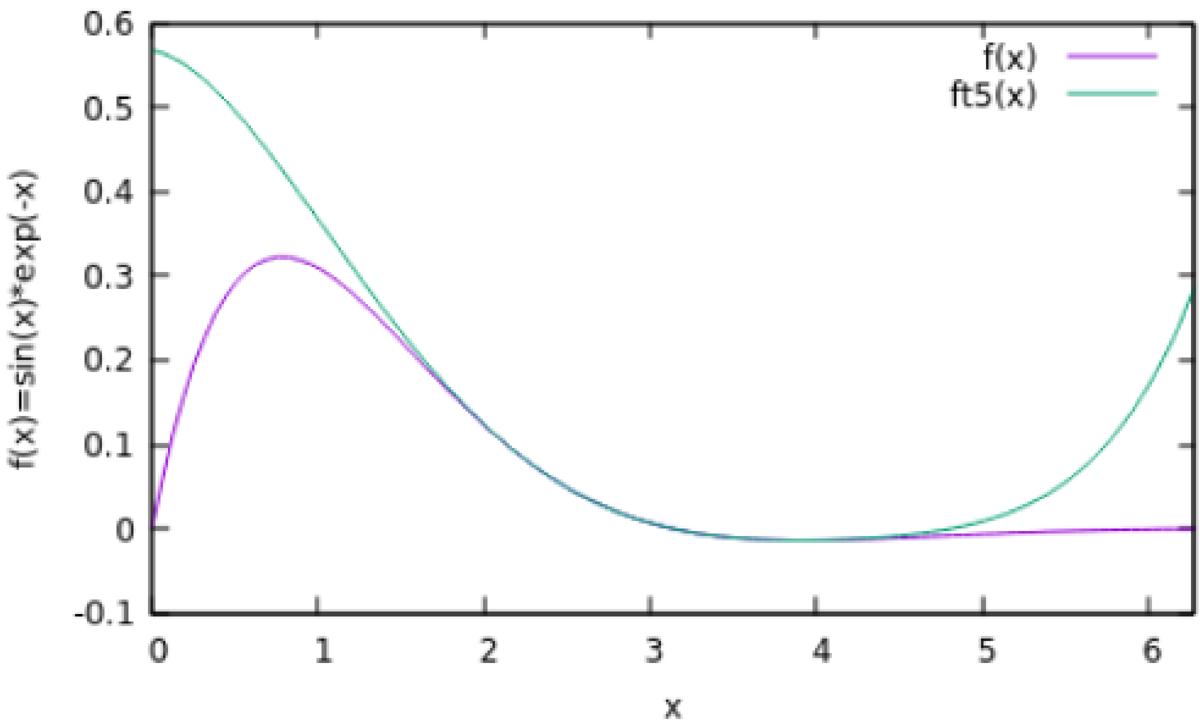


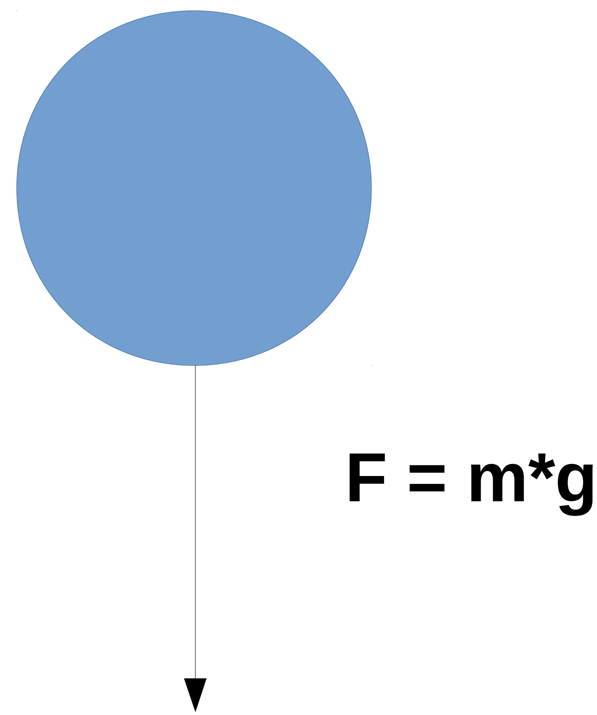
Rysunek 1. Przybliżenie liniowe funkcji w punkcie x=π, jest to rozwinięcie funkcji wokoło tego punktu do 1. wyrazu szeregu Taylora.

Przybliżenie funkcji f(x) szeregiem Taylora wokoło punktu x=π dla dwóch wyrazów szeregu:



Okazuje się, że "bliskie otoczenie" wcale nie musi być takie bliskie, przybliżenie Taylora naszej funkcji do 5-go wyrazu szeregu daje naprawdę świetną zgodność:




F = m*g

Niech funkcja położenia piłki oznaczona jest jako p(t), czyli położenie w czasie. Nie musimy znać jej jawnej postaci, bo z fizyki wiemy, że pierwsza pochodna to prędkość (v), a druga pochodna to przyspieszenie (tu będzie ono stałe i będzie to grawitacja g).

Jeśli czas jest dyskretny, czyli różnica między dwoma krokami wynosi $t_1 - t_0 = dt$, możemy rozwinąć położenie wokoło punktu t_0 po t_0, aby **wykonać krok symulacji.** Zgodnie z naszymi oznaczeniami niech $a = t_0$, $x = t_0 + dt$, wtedy rozwinięcie wokoło punktu t_0 wynosi [3]:

$$p(t_1) = p(t_0 + dt) = p(t_0) + dt * p'(t_0) + dt^2 * p''(t_0)$$

Podstawiając nasze wzory fizyczne:

$$p'(t_0) = v(t_0)$$
$$p''(t_0) = g$$

Dostajemy wzór na przyspieszenie ruch piłki w polu grawitacyjnym:

$$p(t_0 + dt) = p(t_0) + v*dt + g*dt^2/2$$

Metoda Eulera

- Całkowanie równań ruchu
- Metoda 1-go rzędu (liniowa!)
- Słabe własności, ale często wystarcza

Naszym równaniem ruchu będzie:

$d^2y/dt^2 = g$

Równanie to najpierw “przygotujemy” matematycznie, czyli rozbijemy na dwa równania 1-go rzędu:

- $y' = dy/dt = v$ (prędkość)
- $v' = dv/dt = g$ (przyspieszenie, masa = 1 i przyjęliśmy F=g)

Nasza procedura jest krokowa, znając rozwiązanie w czasie t0 chcemy znaleźć rozwiązanie w czasie t1=t0+dt. Dlatego rozwiniemy teraz prędkość w szereg Taylora z dokładnością do drugiego wyrazu wokoło t1:

- $v(t0+dt)=v(t0) + v' * dt =v(t0) + g * dt$

Podobnie rozwinąć możemy położenie y. Tu zastosujemy rozwinięcie do 1-go wyrazu szeregu Taylora:

- $y(t0+dt) = y(t0) + y'(t0) * dt = y(t0)+v(t0)*dt$

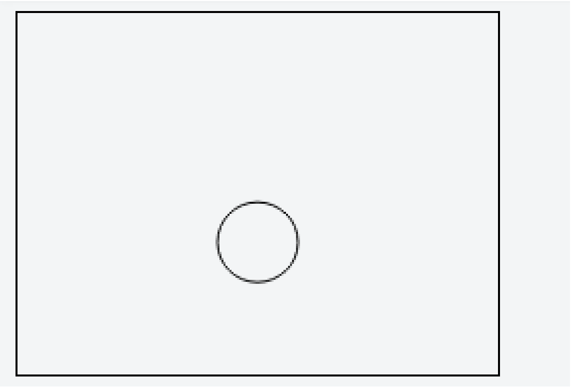
Z tego rozwinięcia możemy wyznaczyć naszą **pochodną z dokładnością do 1-go wyraz rozwinięcia w szereg**:

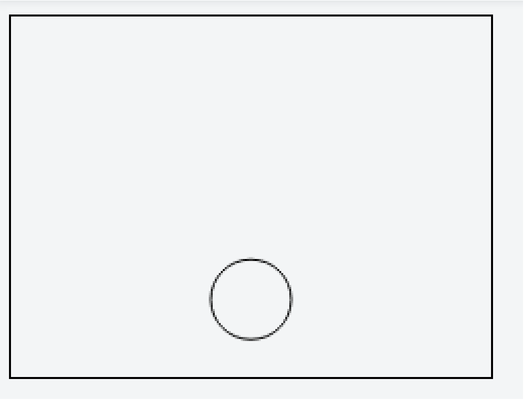
- y’ = y(to+dt)-y(to) / dt

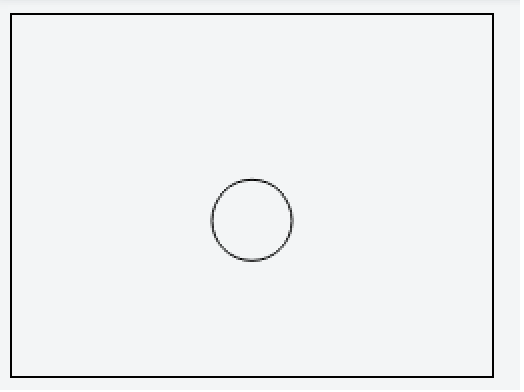
Kompletny algorytm dla numeryczny dla symulacji z użyciem metody Eulera będzie wyglądał następująco:

1. Inicjalizuj pozycję y(0) i prędkość v(0)
2. Pętla obliczeniowa:
3. y=y+v*dt
4. v=v+g*dt
5. Jeśli y < 0 wykonaj v= -v (odbicie)
6. Narysuj piłkę.
7. Wróć do punktu 2.

```
// inicjalizacja
function init()
{
      y=H/2;
      v=0;
}



// pętla obliczeniowa i rysująca
loop=function()
{

      y = y + v * dt;
      v = v + g * dt;

      if(y<RADIUS) v = -v;


      RysujPunkt(y);
};
```







https://jsfiddle.net/56e2tjuw

Zadania „Dyski” (50pkt)

1. Napisz program z dyskiem poruszającym się w obu kierunkach z odbiciami od brzegów. Dysk powinien odbijać się tak, aby nie wystawać poza brzegi.

2. Dopisz do programu możliwość symulacji N dysków o losowo dobranych warunkach początkowych, masach, rozmiarach i kolorach.

3. Dodaj siłę oporu aerodynamicznego zgodnie z formułą Stokes’a dla kuli:
https://pl.wikipedia.org/wiki/Opór_aero(hydro)dynamiczny
Wykonaj kilka symulacji dla różnych współczynników oporu
(lub różnych lepkości płynu). Wskazówka: pamiętaj, że przyspieszenie wyznaczamy dzieląc siłę przez masę (a = F/m).

(*) Zadania na dodatkowe punkty (50 pkt)

4. Do punktu 2. dopisz kolizje między punktami.

5. Dopisz do programu siłę przyciągającą punkty do środka układu
(np. punkt W/2,H/2, gdzie W i H to wymiary układu) z użyciem siły zależnej od kwadratu odwrotności odległości od środka.

Czas 2 tygodnie (termin oddania to zajęcia 20.XI, godz. 23:59)

Literatura

- Matulewski Jacek, Dziubak Tomasz, Sylwestrzak Marcin, Płoszajczak Radosław, Grafika - Fizyka - Metody numeryczne. Symulacje fizyczne z wizualizacją 3D,